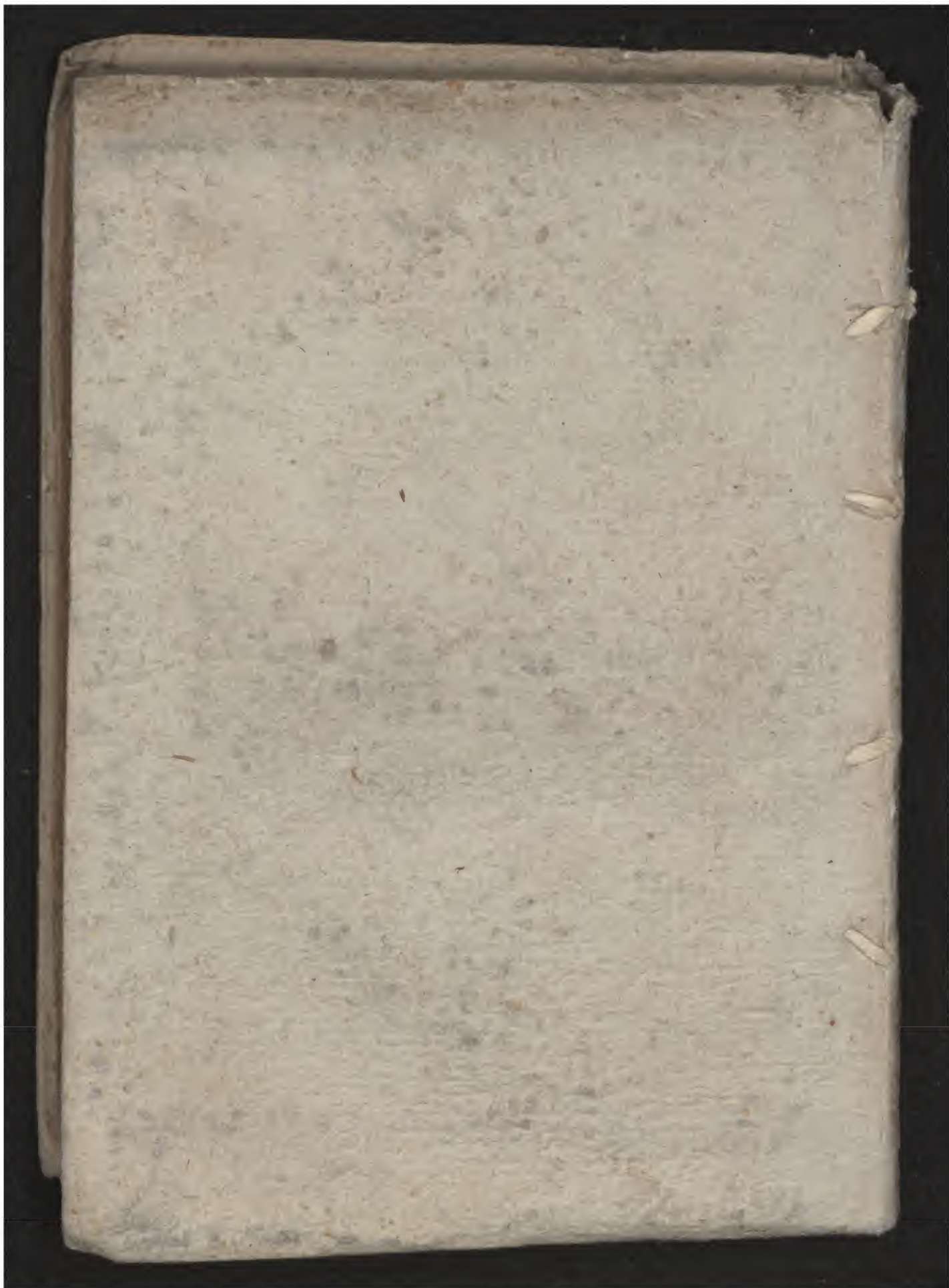




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.321/a







Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.321/a





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.321/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL 1.6.321/a

1 K.6



B  
Librario

2/11

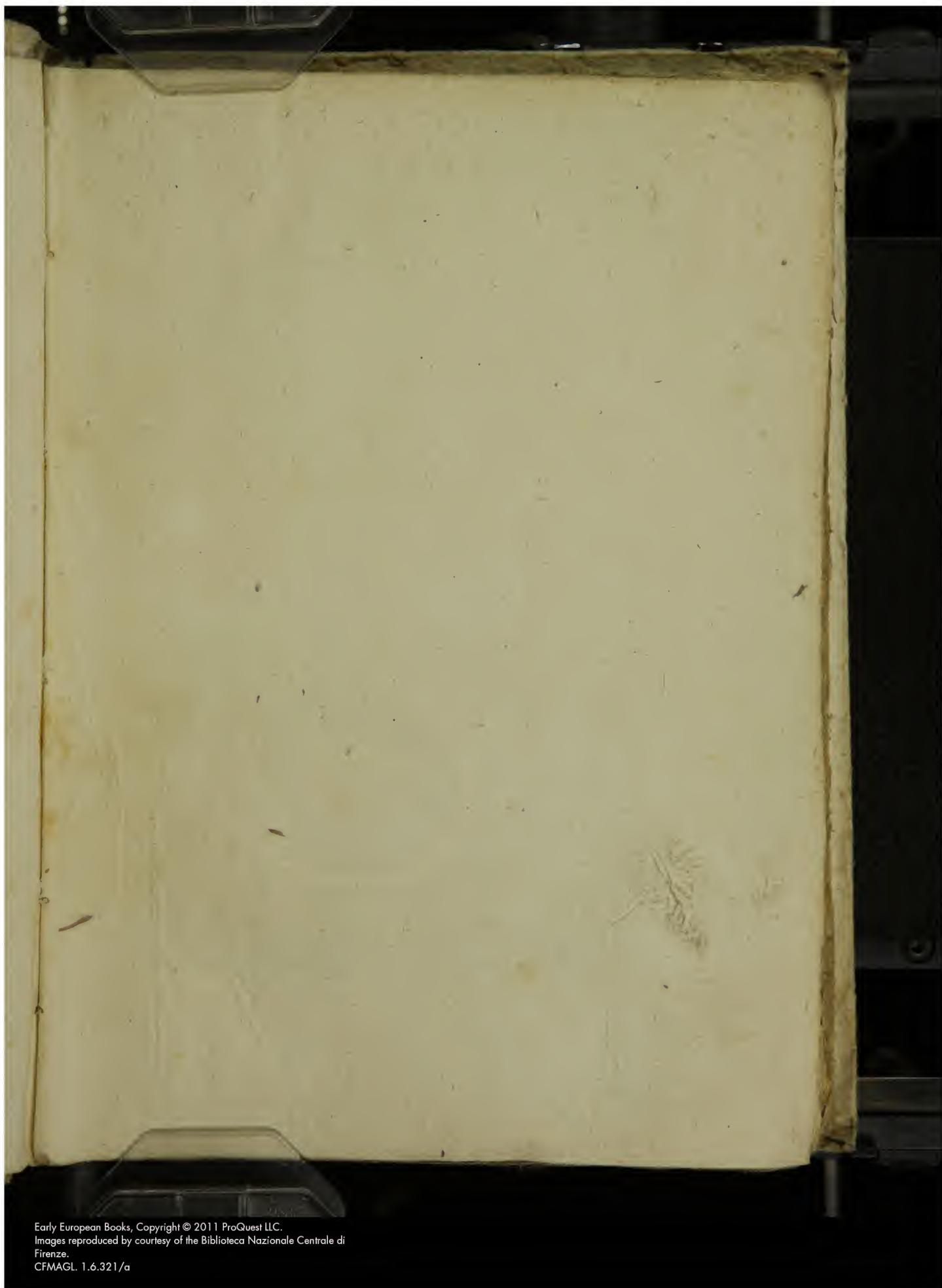
W

W

~~a S. VINC.~~ Octav.

1554

1. 6. 321







CVRVILINEORVM  
A M O E N I O R  
C O N T E M P L A T I O .  
N E C N O N  
E X A M E N  
C I R C V L I Q V A D R A T V R Æ .  
A R . P . G R E G . A S . V I N C E N T I O .  
S O C . I E S V P R O P O S I T Æ .









EXAMEN  
CIRCULI QUADRATVRÆ

HACTENVS EDITARVM CELEBERRIMÆ,  
quam APOLLONIJS alter, magno illo  
PERGÆO non minor Geometra,

R. P. GREGORIJS A SANCTO VINCENTIO  
*Societatis IESV, Exposuit.*

Authore VINCENTIO LEOTAVDO Delphinate,  
eiusdem Societatis.

*Cuius operâ è tenebris simul emergit perelegans  
& peramœna*

CURVILINEORVM CONTEMPLATIO:

Olim inita ab Illustrissimo & Reuerendissimo D. D.  
ARTVSIO DE LIONNE, Episcopo & Comite  
Vapincensi, & Abbate Solignacensi,  
Regiôque Consiliario.

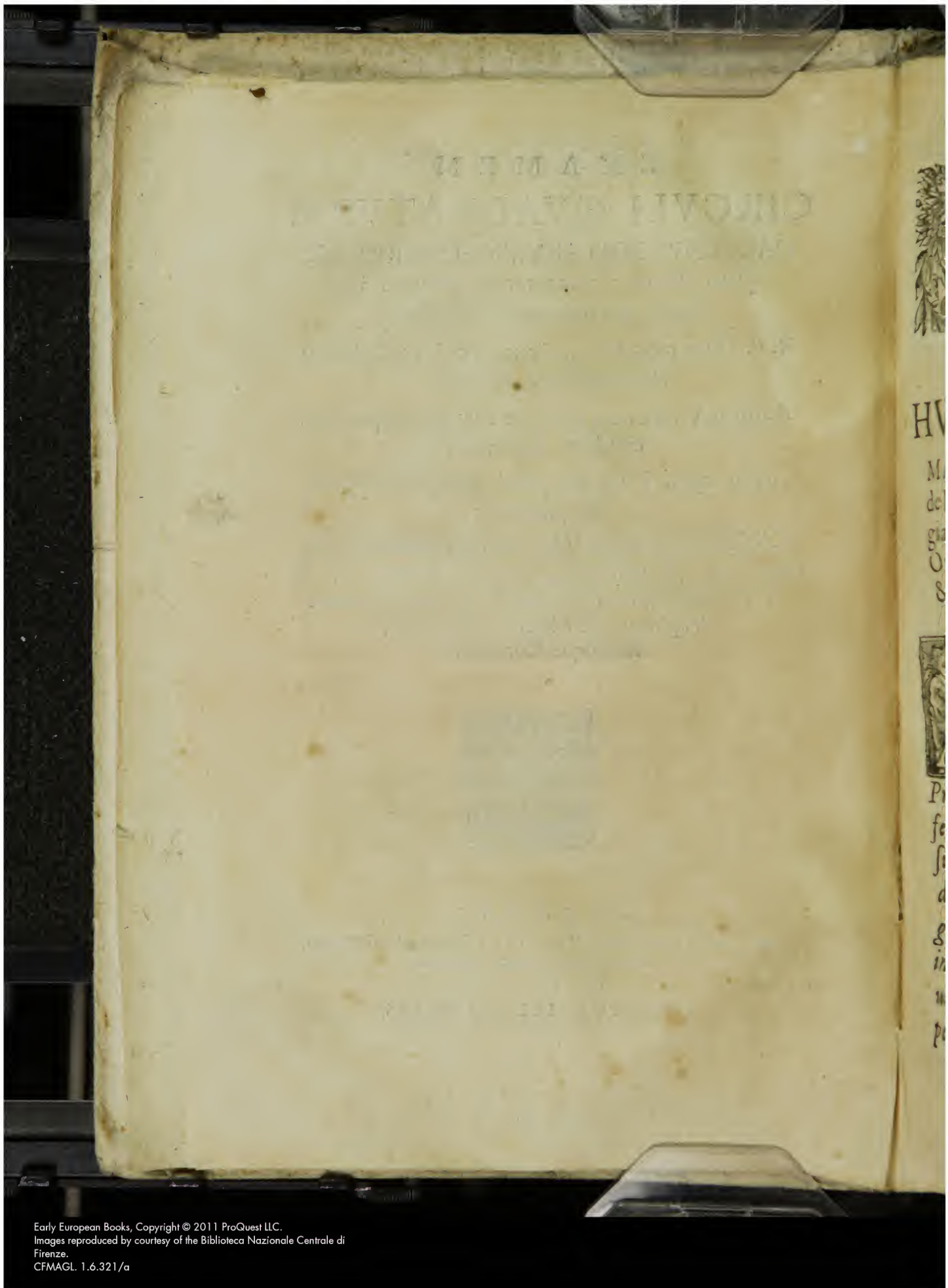


LVGDVN I,

Apud GUILLELMVM BARBIER, Typographum Regium.

M. DC. LIV.

CVM PRIVILEGIO REGIS.







Nobilissimo & Amplissimo D. D.

HVGONI DE LIONNE,

MARCHIONI DE BERNI, DOMINO  
de Frenes, à Regiis Consiliis Ordinario, Re-  
giæ militiæ Sancti Spiritus Commendatori,  
Ordinûmque Regionum Ritibus Præposito  
& Supremo Magistro.



*A* De (Vir Clarissime) tua aternum  
alioqui peritura defero, quæ tibi cum  
non possint non esse acceptissima, à  
colendissimo scilicet Parente tuo  
Præsulum Vapincensium non obscuro lumine pro-  
fecta, non ingrata etiam tibi alia quedam fore cen-  
sui, quæ his è facultate mea sanè tenui, petita acce-  
derent. Hæc utraque, ut se habeant, quove in  
genere versentur, tibi paucis aperio. Ut momenti  
in Mathematicis disciplinis gravissimi, ita gra-  
uissima difficultatis apud Geometras habitus sem-  
per fuit ille nodus, qui rationem spatium circu-  
lare

ā 3



lare in rectilineum conuertendi plexibus adeò cæcis  
inuoluit : ut nulla eorùm, summorum, infimorum,  
industria cum expediendo par hætenus fuerit.  
Eundem adorsus est postremus, loco non postremo  
censendus, nobilis Geometra è Societate nostra,  
R. P. GREG. A S. VINCENTIO, cuius in omni  
Matheseos genere eximia facultas omnibus iam-  
pridem nota, notum etiam diuturnum hanc in rem  
ab eo impensum studium, in spem non dubiam  
Geometras adduxere, se posthac tanta huius dif-  
ficultatis tam expetitâ solutione, eius ope, non  
carituros ; illiusque quantociùs potiùs de-  
siderium accendere vehementer. Hæc à me quo-  
que hisce disciplinis incumbere solito spes concepta,  
hoc idem conceptum desiderium. Sed quàm inanis  
illa, tam hoc irritum in remotis Alpium nostra-  
rum Cottiarum iugis futura erant : nisi Illustrissi-  
mi Præfulis Parentis tui, de omnibus bene mereri  
soliti, propensa etiam erga me voluntas occurrisset.  
Ut enim hoc Geometricum opus, Quadraturæ præ-  
sertim nomine spectandum publico iuri tandem  
commissum, ipsi primùm innotuit ( innotuit autem  
hisce in locis aliquantò tardius ) summâ diligen-  
tiâ illud conquiri ; paratùmque, ab ipso vix aper-  
tum ad me transmitti curauit. Atque ut votis  
meis quam cumulatissimè satisfaceret ; subtilem  
æquè



equè ac iucundam circa Cyclica contemplationem,  
olim dum in ludo literario versaretur, & in Geo-  
metricis genium suum exerceret, susceptam, eidem  
operi comitem adiunxit: eo solum pro tanta gra-  
tia mihi imposito onere, quàm ipsa species ferat,  
sanè grauiore: ut quid de hac noua tam celebri  
Circuli quadrandi ratione sentirem ipse: quid à se  
sentiri vellem, cum primum liceret, aperirem. Ob-  
sequi conatus sum (quì enim viri grauißimi iuxta  
ac officiosissimi nutui vel minimo non obsequeretur?)  
Posthabitis omnibus huic uni cogitationi incubui:  
Tetragonismum hunc mente assequi complectique  
conatus sum: quidquid in Geometricis facultatis,  
quidquid in Arithmeticis paratum mihi aliquan-  
do fuisset; totum excussi, exhausti totum. Non  
perinde tamen altissimum gurgitem mihi quidem  
licuit exhaustire difficultatum: quæ hanc circulum  
in rectilineam formam fingendi rationem non tam  
dubiam; quod in Mathematicis euidenti tantum  
demonstratione niti solitis, vim condemnationis  
obtineret: quàm defectus alicuius compertam sua-  
dere videantur. Hanc ergo sententiam meam suis  
rationibus ac fundamentis stabilitam, & metho-  
do, quam in re difficillimâ licuit maximè expeditâ  
traditam, cum Illustrissimo Præsuli, ut expetie-  
rat, exhibuissem: eâ gratulatione, quæ eius est  
beni



benignitas, tandem excepit: ut non luce tantum  
eam dignam assereret, sed nec Geometras sine  
Geometriae dispendio diutius latere posse pronun-  
ciaret. Cui cum virorum aliquot non imperitorum  
par sensus suasusque accederet: ipsiusque adeo Au-  
thoris Quadratura (adeo verum est; ut quisque  
doctior est, ita demissius de se sentire, ac loqui mo-  
destius) non modo non aliena foret; quin etiam,  
ut certo nuncio perlatum est, propensa voluntas;  
in assensum ab eo pellici me passus sum: passus ta-  
men ea conditione, ut & ipse suam, quam penes  
me haberem, de Cyclicis commentationem, una  
cum meo illo Quadratura noua examine, edi pa-  
teretur. Hic virum optimum, suorum parum  
equum aestimatorem, vehementer abnuere, obijce-  
re lucubratiunculam illam suam, quam olim ani-  
mitantum gratiam susceperat, non esse eiusmodi,  
ut cum grauissima disceptatione circa grauissi-  
mam difficultatem de Tetragonismo ortam, apte  
possit copulari. At me contra suadere, hortari,  
certum ac fixum declarare, censuram illam meam,  
ut paucis per se suauem, nisi suorum Cyclicorum  
amoenitate condiretur, ita non omnibus apponen-  
dam. Effectum tandem, eius ut assensum, si mi-  
nus verbo, quod fuisset optatius; saltem silentio  
nutiue, quod abunde est, consecutus sum. En igi-



tur tibi, Vir Clarissime, hoc utrumque opus:  
quod non tam rerum quæ tractantur connexio-  
ne, (etsi in iis nonnullam observare liceat) quàm  
Authorum necessitudine, eosque inter statuto, cu-  
ius memini, pacto; unum in volumen coaluit: quo  
non aliud vel gratius futurum tibi vel à te carius  
fouendum, iure mihi persuasum est. Haec nimirum  
sunt, ab amantissimo observandissimoque Parente  
tuo tum olim inita; tum nuper mihi imperata vi-  
gilia. Novi equidem alia non pauca præ iis longè  
clariora, quibus ipse meritò glorieris, eius orna-  
menta. Novi, quod Delphinatium neminem la-  
tet, quantà cum integritatis famam Senatorem pri-  
mum egerit: quo in Deum pietatis studio, (post-  
quam Nobilissima piissimæque Genitrix tua, D.  
Isabella de Seruien, quæ in ipso Adolescentiæ flore  
te Semestrem reliquit, è viuis erepta est,) abiecto fo-  
rensi strepitu, aliisque mentem fatigare solitis cu-  
ris, sanctiorem vitæ Clericalis statum amplexus  
fuerit. Quem dum pro votis colit: non potuit pien-  
tissimum Regem, diuinique cultus promouendi stu-  
diosissimum Ludovicum Decimumtertium memo-  
riæ triumphantis, eius probitas doctrinæque singu-  
laris latere: qui bonorum omnium cum gaudio  
plausuque ad Vapincenses Insulas ipsum excita-  
vit: quas eam cum dignitate tuitus est, ut aliquot  
ē post



pòst annis in Metropolitanâ Ecclesiâ Ebredunen-  
sis Sedē, ex sui illius Europâ totâ celeberrimi, piis-  
que tot gestis apud posteros, superosque, ut pium est  
sentire, immortalis, Guillelmi d' Hugues obitu va-  
cantē, ipsum prouehi mandarit paterna in eundem  
voluntatis heres Ludouicus Decimusquartus: ra-  
tus scilicet, nec immeritò, se acerbum illum Ebre-  
dunensium luctum non mediocriter liniturum, si  
lucidissimi Solis sui occasum non absimilis ortu re-  
crearet. Verum tunc etiam consueta moderationis  
sue non oblitus, quâ laude se eo munere dignum  
præbuerat: eâdem statuit ab eo abstinere: illudque,  
(quo Ebredunenses deuinxit non mediocriter)  
Viro cessit, & genere, & doctrinâ, & eloquentiâ,  
virtutūque cæterarum Archipræsule dignissi-  
marum laude clarissimo, Georgio Aubussonio Co-  
miti de la Fueillade. His, inquam, pluribusque  
alijs, quæ suauissimum Parentem commendant  
tuum; tibi que adeò splendorem conciliant non ob-  
scurum, ornamentis, collatum hoc eius specimen  
ingenij, tenue quispiam, leuisque apud te ponde-  
ris futurum fortasse censebit. At verò mea longè  
alia sententia est: nihil enim à summis viris pro-  
fectum vel leue censeretur debet, vel memoriâ poste-  
riorum non dignissimum: solètque quidpiam,  
etsi lenius, à iacturâ seruatum & de nouo par-  
tum,



tum, iam partis illustrioribus & in tuto positis  
voluptatem afferre maiorem. Ita praterea naturā  
comparatum est, ut maiorum gesta singula, stu-  
diāque etiam leuiora, suauis quodam cum sensu  
memoriā repetant posterī: ut non paruum apud  
te gratiam ob hanc Cyclicorum contemplationem  
(quam Geometris aliquot non infima nota maxi-  
mè probari comperi) ab interitu seruata, me ini-  
turum confidam: quam mihi cumulatissimam, ut  
ab ingenuis moribus tuis sperari par est, repende-  
ris, si posteriorem exigui huius voluminis partem,  
quā examen & censuram ardua illius Quadra-  
tura Circuli prosecutus sum, eodem quo priorem,  
tuis rebus iure per se accensam, studio complecti  
presidiōque tueri minimè graueris. Quod enim  
huic mea lucubrationi parare possim eo firmitus:  
quod & Paterni, Lionnæorum, & Materni, Ser-  
uientiorum, stabilit generis claritas: quod maturum  
consiliū, singularis que solertia, quā res grauissimas  
tum in Italia, tū in Gallia ab ipsa vix ineunte ado-  
lescentiā ad felicem exitum perduxisti, commen-  
dant: quod ex graui illo munere à iussis sanctioni-  
busque Principum nostrorum, quo cum laude per-  
functus es, momentum admittit non leue. Quod  
denique experturus sum inconcussum, quando ad  
tam multa, quibus splendes, ornamenta, ex  
c 2 Regia



*Regia in te munificentia, ea denuò facta est ac-  
cessio, ut Regiorum Ordinum Torquatorum riti-  
bus præsides summus Magister. Non minore sanè  
mihi opus erat patrocínio; quò animum, (quem  
materiæ cum gravitate coniuncta difficultas, &  
Geometra, quem petere videor, eximia facultas,  
meoque omni conatu longè superior, deterrebant,)  
tandem inducerem, ut hasce meas observationes  
luce frui publicâ paterer. Ad quod non leuiter  
etiam impulit, quòd iis Illustrissimi Præsulis lu-  
cubrationem non tam comitem quàm ducem præfi-  
cere mihi licere cernebam. Hæc igitur ut in aliquod  
observantiæ in te meæ, quam impensè colo, testimo-  
nium excipias, etiam atque etiam rogo,*

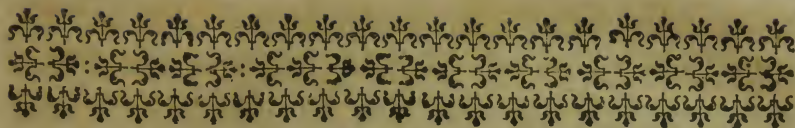
VIR AMPLISSIME.

Deuotus tibi, tibi que obsequentissimus  
seruus, VINCENTIVS LEOTAVDVS  
è Societate I E S V.

Ebreduno, a.d. V I. Non.  
Maij 1654.

AD





## AD LECTOREM

### Monitum perutile.



E, Beneuole mi Lector Geometra! latere non opinor opus non vulgare. Quem enim tota in Europa lateat Geometriæ studiosum? quod R. P. GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO, Societatis nostræ, maximo cum rei totius Mathematicæ incrementō, aliquot antè annis publici iuris fecit. Illud ad me sanè, in his Delphinatium Alpibus commorantem, non nisi tardiùs; pro voto certè, quod apud me nota pridem Authoris doctissimi fama concitarat, non nisi tardissimè accedere potuit: accessit tamen aliquando. Quo ubi primùm potiri licuit, auidissimæ cupiditati satisfaciendi gratiâ, dum amplum volumen à capite ad calcem, vt fit, verso reuersoque: obruior eximiâ selectâque rerum hactenus inauditarum copiâ & varietate: tersâ grauique subtilia quæque probandi methodo capior rapiorque. Authorique gratulor ea demum ab eo præstita, quæ de eo pridem conceptam ex fama opinionem



## AD LECTOREM

nem licet maximam, longè superarent. Quamquam verò toto hoc in opere nihil non dignissimum admiratione occurrerit: illud tamen præcæteris ad se mentis aciem meritò conuertit, quod veluti tantæ huius lucubrationis scopum vnicum sibi præstituit doctissimus Geometra: Circuli scilicet tot iam retrò sæculis, tanto tamque irritò conatu quæsitus Tetragonismus. Cuius enim studium, illum è tenebris nunc primum emergentem intuendi, cupido non accendat? eoque vehementiùs, quò longiùs nota Artificis eximia facultas, vel hoc ipso solo opere testatissima, omne dubium de propositi consecutione auertat. Reliquis ergo interim omis- sis, huic vni operæ mentem adieci: vt totius huius Quadraturæ rationem vniuersam, exploratam planèque perspectam haberem. Quod tum demum me assecuturum censebam: si quæ à summo Geometra, è Geometriæ legibus statuta, ad Arithmetices iudiciùm, quo nec æquius, nec apertius reperire est, cuncta referrem. Id verò dum molior, dici vix queat, quot quantæve occurrere difficultates. Conica sunt, hoc est sublimioris Geometriæ reconditiores facultates, è quibus ferè solis tota hæc Quadratura petitur. Quodnam deinde numeros inter & Conica commercium? Adde, volatui magis quàm ingressui assuetum Authorem, per prærupta æquè facilè ac per plana contendere, quò vix liceat



### MONITVM.

liceat perreptare. Sed improbo & obdurato conatui nullanon solet cedere difficultas. Euasi tandem ad equissimum Arithmetices tribunal, à tabulis calculi multiplicis ex eius iure confecti non omninò imparatus. Quid sententiæ pronunciatum? aliud fortasse quàm ferat iam concepta communis opinio. Quid porrò? Quadruplicem hanc Quadraturam necdum hac vice ita suis numeris omnibus absolutam videri, vt omne defectûs discrimen euadat: atque adeò neque à se, neque à coniunctissima sorore Geometria, vt veram & certam, qualis desideratur, admitti posse. Cuius sententiæ equitas, vt cuius aperta sit & euidens, liceátque omnem dubitationis huius causam perpendere: perscribo quæcunque ad id conferre visa fuere.

In tres itaque partes, siue Libros, totum hoc examen distributum est à me. Quorum primus in Rationum natura satis alioqui obscura, plenius planiusque exponenda totus consumitur. Earum enim cognitio, vt ad res omnes Geometricas vtilissima futura est; ita ad propositum mihi scopum apprimè est necessaria: quando ex earum visceribus suam Circuli quadrandi rationem ferè totam hausit Geometra noster. Qui licèt eas omnem in partem versarit, mirasque earû facultates exposuerit fusissimè: Quia tamen in tanta rerum copia (nihil enim eâ tractatione copiosius) difficile sit ea seligere quæ  
huic



## AD LECTOREM

huic instituto in seruire queât: Quia etiam in sola traduntur quantitate continua; cùm tamen ad discretam cuncta reuocare nunc propositum sit: Quia denique præruptior probandi methodus ab Authore usurpata videatur: ideò collectior, & ex numeris petita, stylóque mansuetiore inita tractatio tradetur. In qua non leue duces, demonstrationem haberi Principij illius: quo à Geometris pronuntiatur, Rationem quantitatis vnus ad alteram, componi ex Rationibus quantitatum quarumlibet inter duas illas quantitates interiectarum. Quod hætenus, vel ipso Geometra nostro teste, *Lib. 8. Princ. 2.* eo tantùm iure à Geometris est admissum, quòd nihil vnquam absurdi ex eo consecutum sit: & vt Principium admittendum est, inquit idem, *donec ratio alicui occurrat, hoc ipsum Geometricâ demonstratione inter Theoremata reducendi.* Reductum igitur reperies hoc *Lib. 1. Prop. 22.*

Secundus verò Liber eò refertur totus, vt primam & fortasse præcipuam è quatuor Quadraturis ab Authore expositis, numerorum iudicio subiiciat. Quod tandem satis ex voto, sed operâ, mihi crede, non leui videor consecutus. Multa ergo præmittuntur quasi Lemmata ad solidas quantitates illas spectantia, quas primus magnus hic Geometra mirabili industriâ, magnóque cum huius disciplinæ incremento, in Geometriæ thesaurum contulit: quæ scilicet  
cx



## MONITVM.

ex planorum per plana decurrentium vestigiis  
sive ductibus ortum habent. Licet enim ipse  
primus earum Author, solidas huiusmodi quan-  
titates Libro suo. septimo sanè amplo sit fusè  
prosecutus : nonnulla tamen ad institutum  
meum vel addenda fuere, vel compendiosius  
& ad calculum aptius, exponenda : ea certè se-  
ligenda, quæ præ cæteris necessaria videbantur.  
Occurret autem ad Propositionem 27. iucunda  
de angulis præsertim contingentiae digressio,  
cui Author Lib. 8. Princip. 1. præbuit occa-  
sionem.

Tertius denique Liber, quanquam secun-  
dæ solius Quadraturæ examinandæ totus im-  
pendi videatur : quia tamen duæ reliquæ, tertia  
& quarta, eâdem methodo, iisdemque Princi-  
piis stabiliuntur ab Authore, easdem vnâ ea-  
démque operâ discutit. Varij ergo singulares ca-  
sus ex numerorum iudicio expenduntur : quo-  
rum si vel vnus (quid si plures) defectûs ali-  
cuius condemnetur, haud dubium quin serua-  
to Logicorum iure, Tetragonismus ipse totus  
vitio laboret. Huic ratiocinio aliud accedet ex  
Propositione 77. lib. 10. Authoris petitem, quod  
vi non minore hæc Quadraturas concutere  
videatur.

In singulis verò huius exercitationis partibus  
tribus is ordo obseruatus est, vt perpetua per-  
gat Propositionum series, nullo Axiomatum,

i Defini



## AD LECTOREM

Definitionum, Theorematum aut Problematum discrimine: quæ omnia, generali designo Propositionis voce: sic enim & ipsa facilius percipi; & ea in quorum gratiam afferuntur, clariùs demonstrari, cum non à longè petatur argumentum, compertum est experientia. Si quid præter hæc, fuerit obseruandum, suo quodque loco reponetur, nihil vt nisi vnum, quod hîc moneam, supersit.

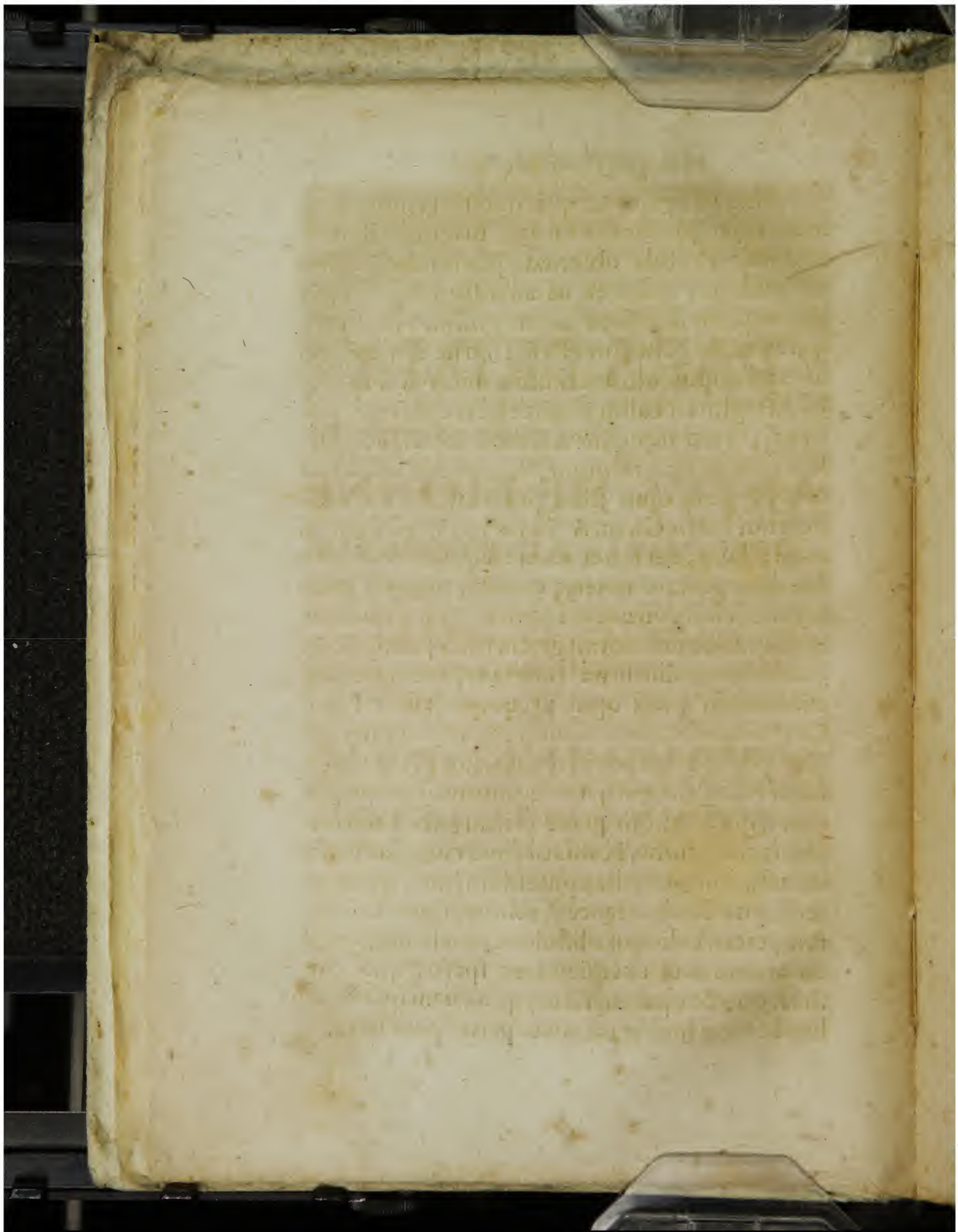
Nimirum, etsi quidpiam hoc in opere Geometrico ad absolutam Tetragonismi cognitionem, desiderari videatur: absit tamen vt apud Geometras Diuinum illud opus Geometricum minori in pretio habeatur. Huic equidem toti à Circuli Quadratura nomen inditum est ab Authore, eo fortasse consilio, quòd Problema præ cæteris omnibus celebre ad Quadraturam Circuli spectans in eo pertractetur: Quàm multa tamen scitu dignissima exhibentur ab huiusmodi Problemate omninò aliena. Perpende priores ipsos nouem totos Libros operis huius Geometrici: quid in his obserues adeò Tetragonismo alligatum? Imò ipsum etiam decimum & vltimum Librum Quadraturis peculiariter destinatum percurrere: si paucas admodum Propositiones exceperis, quæ mihi probari, sicuti & Tetragonismi quatuor ex iis collecti, non potuere: reliqua non nisi summo Geometræ dignissima obseruaturus es.

Restat



# MONITVM.

Restat vt aperiã , quã ductus ratione huic  
meo Tetragonismi examini, Curuilinea ab Illu-  
strissimo Præsule obseruata præmiserim : non  
eã quidem , quòd ex iis ad institutum meum  
(quanquam nec ab eo aliena omnino sunt) ali-  
quid auxiliij petiturus essem : sed ne eo sanè per-  
iucundo opusculo æternũ careret Geometri-  
ca disciplina. Nolim enim te latere, Virum opti-  
mum , morumque suauitate & doctrina singu-  
lari commendatissimum , vt primũ in manus  
eius peruenit opus illud præstantissimum Re-  
uerendi Patris GREG. A SANCTO VINCENTIO;  
illud ad me , cui sciret acceptissimum fore , pro  
sua benignitate deferri curasse , vnãque illam  
Cyclicorum commentationem suam olim te-  
nerã adhuc ætate animi gratiã susceptam , & ex  
eo obliuioni diuturnæ traditam , æternæ etiam  
tradendam , nisi opus vtcunque affine Patris  
Gregorij, eius memoriam reuocasset. Cũ ergo  
Geometræ aliquot exercitatiũculam illã meam  
circa Patris Gregorij Tetragonismos extorque-  
rent à me : æquum planè censui , nec à re Geo-  
metrica alienum , & illis tibique cumulatiũs sa-  
tisfactũ iri: si cum illa opusculum hoc , quãuis  
renitente & obtestante Authore, simul exhibe-  
rem, æternã alioqui obliuione sepeliendũ; quod  
eo animo à te excipiendum spero , quo Au-  
thor, quo & opus meretur; quo etiam ipse & il-  
lius & meæ lucubrationis te participem facio.





# PARS PRIMA

ILLVSTRISS. AC REVERENDISS. D.  
ARTVS DE LIONNE,  
EPISCOPI, AC COMITIS  
VAPINCENSIS, ABBATIS  
SOLIGNACENSIS, AC REGII  
CONSILIARII,  
A M O E N I O R  
CVRVILINEORVM  
CONTEMPLATIO.

PARS PRIMA

ILLUSTRISSIMO AC REVERENDISSIMO

ARTVS DE LIONE

EPISCOPO AC COMITI

DAVIDE REVERENDISSIMO

SOLICISSIMO

CONSESSORI

AC

CHANCELLARI

COMITIS

DAVIDIS

REVERENDISSIMO

AC

COMITI

DAVIDIS

REVERENDISSIMO

AC

COMITI

DAVIDIS

REVERENDISSIMO

AC

COMITI





# INDEX,

## Siue Synopsis Partis Primæ, De figuris Cyclicis.

Vt excogitata ab Hippocrate Menoïdes, siue Lunula, meditationis huius instituendæ causam præbuit: ita priori loco ipsa debuit exhiberi. Primis ergo Propositionibus, nimirum:



PROPOSITIONE I. pag. 1. 2. pag. 2.  
3. pag. 3. 4. pag. 5. 5. pag. 6. 6. pag. 7. 8. pag. 11.  
Exponitur ipsa forma Lunulæ Hippocrateæ. Eiusdem constructio. Æqualitas cum Rectangulo triangulo Isoscele: Tum linearum eam componentium potentia attenditur, & ex ipsis datis eam construendi modus aperitur: ac tandem cuius rectilineti dato æqualis Lunula Hippocratica exhibetur.

Prop. 9. pag. 12. Similes Circulorum sectores definiuntur.

Prop. 10.



## I N D E X

Prop. 10. pag. 12. *Definiuntur segmenta Circulorum similia immediatius quàm ab Euclide definita fuerint.*

Prop. 11. pag. 14. & 12. p. 15. *Demonstratur similes sectores, similiàque segmenta quorumcunque circulorum ita se habere inter se, ut se habent ipsi circuli quorum sunt sectores vel segmenta.*

Prop. 13. pag. 16. *Ostenditur quinam sectores diuersorum circulorum esse possint aequales.*

Prop. 14. pag. 17. *Lunula Hippocrateæ diuisio mirabilis & expeditissima per lineam rectam instituitur; duobusque modis constructio demonstratur: ac tandem varia inde deducta Corollaria iucundissima colliguntur.*

Prop. 15. pag. 22. *Construitur triangulum Curvilineum non tantum æquale, sed etiam Isoperimetrum Menoïdi Hippocrateæ.*

Prop. 16. pag. 25. Prop. 17. pag. 27. Prop. 18. pag. 30. *Mira consonantia inter Meniscum Hippocraticum, & hoc curvilineum triangulum, figuræ licet longè diuersæ, exponitur: præsertim quoad diuisionem utriusque per eandem rectam lineam in data quauis ratione.*

Prop. 19. pag. 31. Prop. 20. pag. 32. Prop. 21. p. 34. Prop. 22. pag. 35. Prop. 23. pag. 36. Prop. 24. pag. 38. Prop. 25. pag. 39. *Exponitur ratio componendæ novæ Menoïdis, Hippocratiçæ non minus elegantis vel subtilis, quæ rectilineo cuius sit æqualis.*

Prop. 26. pag. 42. *Menoïdes construitur Pentagono æqualis*



# I N D E X

*æqualis non quidem Geometrica sed Arithmetica ratione.*

*Prop. 27. pag. 46. Triangulo rectangulo duos simul Meniscos æquales exhibet.*

*Prop. 28. pag. 48. eiusque Scholio. irregularissimum quoddam triangulum curvilineum ostenditur æquale triangulo rectilineo maxime regulari.*

*Prop. 29. pag. 53. Ad dati circuli peripheriam armilla æqualis dato circulo adscribitur, extra quidem semper; at non semper intra.*

*Prop. 30. pag. 55. Polygono cuius regulari, maxime irregularem figuram curvilineam æqualem construit.*

*Prop. 31. pag. 59. Prop. 32. pag. 60. Quadrangulum cyclicum dato circulo æquale, semel iterumque exhibetur.*

*Prop. 33. pag. 63. Construitur mixta quedam figura. triangulo æquilatero æqualis.*

*Prop. 34. pag. 64. Ex eadem figura mixta demitur pars quedam armillaris, parti cuidam trianguli æquilateri æqualis.*

*Prop. 35. pag. 65. Huic parti trianguli æquilateri aliud rectilineum æquale exhibetur.*

*Prop. 36. pag. 66. Lunula quedam triangulo mixto æqualis demonstratur.*

*Prop. 37. pag. 68. Ostenditur Circulus triangulo æquiangulo circumscriptus, minor tribus semicirculis circa latera eiusdem trianguli descriptis.*

O

*Prop. 38.*



## I N D E X

*Prop. 38. pag. 72. Ostenditur circulus Pentagono regulari, & aliis regularibus figuris Pentagonum numero laterum superantibus circumscriptus, maior esse semicirculis omnibus circa latera polygoni descriptis: eoque maior quò Polygonum pluribus lateribus constabit.*

*Prop. 39. pag. 79. Exhibetur modus sectorem circuli ad alium sectorem reuocandi equalem, & alteri dato sectori similem; ad cuius angulum angulus illius rationem habeat notam. Unde seges copiosissima nascitur omnia polygona regularia transformandi in mixtas figuras.*

*Prop. 40. pag. 84. Prop. 41. pag. 86. Prop. 42. pag. 88. His tribus Propositionibus via aperitur; qua præter opinionem omnem; omnia quæ lib. 2. Eucl. traduntur de reſtangulis ex varia linearum ſeſtione ortis: ad circulos vel Ellipſes transferri queant. Nec quæ Euclides tantum lib. 2. ſed quæ lib. 10, quæ etiam Alij paſſim circa reſtangula, & Quadrata, quæ varia ſeſtio lineæ rectæ generat, demonſtrarunt; eadem omnia circulis & Ellipſibus æquè conueniunt, ut ex hoc breui ſpecimine cuique licebit colligere abſque longiori applicatione ſingulorum, quæ volumen conderet immenſum.*

*Prop. 43. pag. 89. Explicat quid vocetur complementum duorum circulorum. Tum demonſtratur, illud eſſe medium proportionale inter duos circulos, quorum eſt complementum. Ostenditur denum in Scholio iucundiſſima ſymbolizatio inter huiusmodi Cyclica complementa circulorum*



## I N D E X

*circulorum, & Quadratorum complementa, tam quoad aream; quam quoad ambitum.*

*Prop. 44. pag. 94. Prop. 45. pag. 96. Prop. 46. pag. 98. Duae priores Propositiones Lemmata sunt ad ostendendum in tertia segmentum cuiusdam circuli, aequale semissi trianguli cyclici.*

*Prop. 47. pag. 119. Construitur triangulum cyclicum dato circulo aequale.*

*Prop. 48. pag. 104. Datis duobus sectoribus siue equalibus siue inequalibus equalium circulorum, datâque sectorum ratione, alterum eorum ad alterius arcum apponere, siue extra, siue intra & versus centrum quando id fieri potest.*

*Prop. 49. pag. 109. Dato sectori ad centrum circuli, aequalem sectorem ad circumferentiam eiusdem circuli, construendi modus aperitur.*

*Prop. 50. pag. 110. Demonstratur duas quaslibet rectas lineas à contactu duorum vel etiam plurium circulorum sese tangentium; emissas, tam ex ipsis circulis, quàm ex Menoidibus, quas claudunt eorum peripheriæ, intercipere partes quoad rationem similes.*

*Prop. 51. pag. 112. Est hoc iucundissimum subtilissimumque Problema; quo per duas rectas lineas ex qualibet Lunula, per duos circulos sese tangentes, efformata pars definitur qualibet imperata.*

*Prop. 52. pag. 114. Descripto super radium alicuius circuli, altero circulo, priorem tangente. Ostenditur*  
quo



## I N D E X

quomodo radius quilibet maioris circuli definiat segmen-  
tum quoddam minoris circuli aequalè triangulo mixto, ex  
Lunula intercepta abscisso.

Prop. 53. pag. 115. Ostenditur quilibet radius maioris  
circuli (eadem repetitâ suppositione pracedente) ex utro-  
que circulo terminare arcus æquales à contactu nume-  
ratos.

PROPOSI





## PROPOSITIONES.

### PROPOSITIO I. DEFIN.

Lunula Hippocratis est figura conuexo-caua semiperipheria circuli, & alterius circuli quarta parte peripheriæ circumscripta.

### EXPOSITIO.

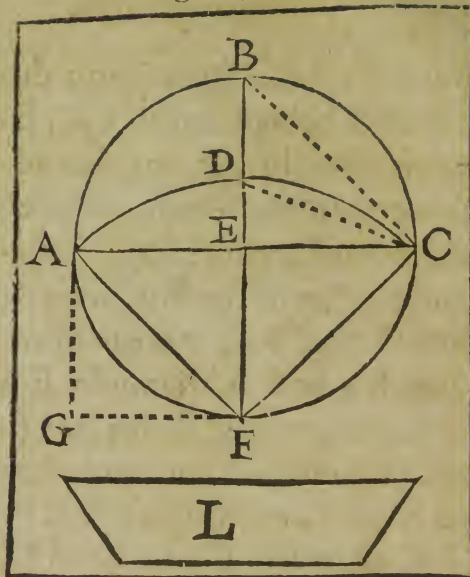
**C**ELIBERRIMA est hæc figura tum antiquitate, tum Authorum primæ notæ commendatione, tum etiam ipsa sua subtilitate & elegantia, ut non immeritò frontem occupare debuerit huius exercitationis meæ: cuius etiam auspicandæ præbuerit occasionem.

Esto itaque semicirculus  $ABC$ , arcus verò  $ADC$ , *Fig. I.* semicirculum secans in  $A$  &  $C$ , sit quarta pars alterius cuiusdam circuli. Erit figura conuexo-caua  $ABADC$  Lunula, quæ à primo eius Authore, Hippocratis dicitur: quæque etiam, sicut & reliquæ huiusmodi figuræ conuexo-cauæ, duobus circuli arcubus quibuscumque sese vel secantibus vel tangentibus

$A$  compre



Figura prima.



comprehensæ, dici solent Meniscus aut Menoides, à falcatae scilicet lunæ similitudine: cui congruit etiam vox nostra Gallica *Croissant*.

## P R O P. II. P R O B L.

Lunulam Hippocratis construere.

*Constructio.*

Super linea qualibet recta  $AC$  describatur semicirculus  $ABC$ , cuius centrum est  $E$ : per quod ad  $AC$  ducatur perpendicularis  $EF$  æqualis radio  $EA$  vel  $EC$ . Centro verò  $F$ , radio  $FA$ , arcus  $ADC$  describatur, transiturus necessariò per  $C$ , ut mox patebit. Dico figuram duobus arcibus  $ABC$ ,  $ADC$ , clausam eam esse, quæ construenda proponitur.

*Demon*



*Demonstratio.*

Ducantur  $FA$ ,  $FC$ . Quia igitur duo triangu-  
la  $EAF$ ,  $ECF$  duo habent latera  $EA$ ,  $EF:EC$ ,  $EF$   
æqualia singula singulis, & angulos ad  $E$  æquales,  
nempe rectos ex constructione: erunt bases  $FA$ ,  $FC$   
æquales: atque adeo arcus centro  $F$  radio  $FA$  descri-  
ptus transibit per  $C$ , ut in constructione monui. Quia  
verò duo latera  $EA$ ,  $EF$  ex constructione sunt æqua-  
lia: erunt anguli  $A$  &  $F$  in triangulo  $EAF$  æquales  
inter se. Ergo erit vterque semirectus (rectus enim  
est angulus  $E$  ex constructione) eodem iure semirecti  
erunt anguli  $C$  &  $F$  in triangulo  $ECF$ . Ergo totus  
angulus  $AFC$  est rectus. Ergo arcus  $ADC$  est quarta  
pars peripheriæ sui circuli. Clauditur ergo constru-  
cta Lunula  $ABCD$  semiperipheriâ  $ABC$  unius  
circuli, & quarta parte  $ADC$  peripheriæ alterius cir-  
culi priorem secantis in  $A$  &  $C$ . Ergo per Prop. I.  
ipsissima est lunula Hippocratis. Quæ construenda  
erat.

## PROP. III. THEOR.

Superior Hippocratis Lunula æqualis est *Fig. I.*  
triangulo rectangulo  $AFC$  super diametro  
 $AC$  semicirculi  $ABC$  descripto: cuius duo  
latera sint radij arcûs  $ACD$ .

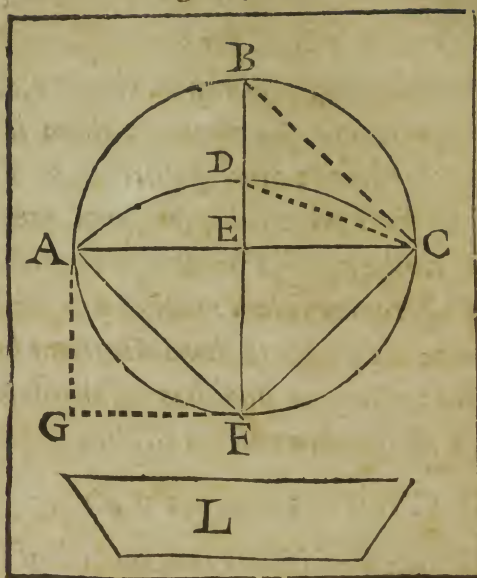
*Demonstratio.*

In triangulo rectangulo  $AEF$ , Quadratum ba- *Fig. I.*  
seos  $AF$  æquale est duobus Quadratis simul laterum

$A$  2  $EA$ ,



Figura prima.



EA, EF: siue duplum Quadrati alterutrius horum laterum æqualium, verbi gratia lateris EA. Cum ergo circuli ita se habeant inter se per 2. lib. 12. vt Quadrata diametrorum atque adeo per 15. lib. 5. vt Quadrata semidiametrorum: erit circulus radij AF duplus circuli, radij AE. Ergo & semicirculus radij AF duplus semicirculi radij AE, hoc est, semicirculi ABC. Semissis ergo semicirculi radij AF siue Quadrans FADC, æqualis est semicirculo ABC. Dematur commune segmentum ADC: remanebit Lunula ABCD æqualis triangulo rectangulo AFC. Quod erat probandum.

## SCHOLIUM.

*Hinc deducebat Chius ille Geometra, vt videre est apud  
Claviu[m]*



# FIGURÆ CYCLICÆ.

Clauium lib. 7. Geom. pract. circuli tetragonismum; sed syllogismo Pseudographo. Cum enim Meniscum hunc semiperiphæria  $ABC$ . & arcu  $ADC$ , qui quarta pars est periphæriæ sui circuli, comprehensum quadrasset: eius loco, dum ad constructionem Quadraturæ suæ deuenit; alium longè diuersum Meniscum substituit: cuius scilicet arcus interior non iam quarta pars foret sui circuli, sed sexta tantum: arcus verò exterior semiperiphæria quidem foret; sed circuli subquadrupli ad alterum circulum: cum tamen subduplus tantum esse debeat; ut ex allata demonstratione huius propositionis constat: ostensum siquidem est circulum radij  $AE$  subduplum esse ad circulum radij  $AF$ . Vide Clauium loco cit.

## COROLLARIUM.

Quare ad summum inferre tantum debuit Hippocrates ex suæ huius Lunulæ tetragonismo circulum Quadrari posse; cum æqualitas tam elegans inter curuam & rectilineam figuram reperiatur: non tamen à se reuera quadratum fuisse.

## PROP. IV. THEOR.

In eadem figura: radius  $EB$ , ita in  $D$  diuiditur ab arcu  $ADC$ : ut pars  $DB$  (quæ est maxima Lunulæ latitudo) ad reliquam  $DE$  sit potentiâ, dupla.

### Demonstratio.

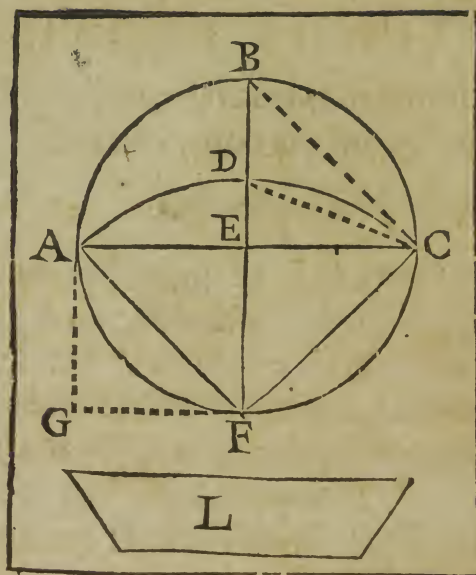
Ducatur recta  $DC$ . Angulus  $AFD$  duplus est anguli  $ACD$  per 20. lib. 3. Sed angulo  $AFD$  æqualis est angulus  $ACB$ . Ergo angulus  $ACB$  duplus est anguli  $ACD$ . Cum ergo angulus  $ABC$  bifariam diuidatur:

A 3

diuidatur

Fig. 1.





diuidatur à recta  $CD$ ; ita erit per 3. lib. 6.  $BD$  ad  $DE$ ,  
ut  $BC$  ad  $CE$ ; sed  $BC$  ad  $CE$  est potentiâ, dupla.  
Ergo &  $BD$  erit potentiâ, dupla lineæ  $DE$ . Quod  
erat probandum.

PROP. V. THEOR.

In eadem figura, dupla lineæ DE potentiâ  
est dupla lineæ BD.

*Demonstratio.*

*Fig. 1.* Quadratum linear, quæ sit dupla linear D E, quadruplum est quadrati super linea D E; sed quadrati super linea D E, duplum est quadratum super D B. Ergo quadratum super linea, quæ sit dupla linear D E, duplum



duplum est quadrati lineæ  $BD$ ; ergo illa est potentiâ, huius dupla. Quod erat probandum.

## PROP. VI. PROBL.

Datâ Lunulæ maximâ latitudine quâcunque  $BD$ , ipsam Lunulam componere.

*Constructio.*

Reperiatur linea  $DE$ , ad quam sit potentiâ, dupla *Fig. I.* linea  $BD$ : simulque ambæ coniungantur, erit composita  $EB$  radius circuli exterioris  $ABC$  Lunulæ futuræ. Arcus verò interior  $ADC$  describetur centro  $F$ , in quo producta  $BE$ , circulum  $ABC$  productum secat.

*Demonstratio.*

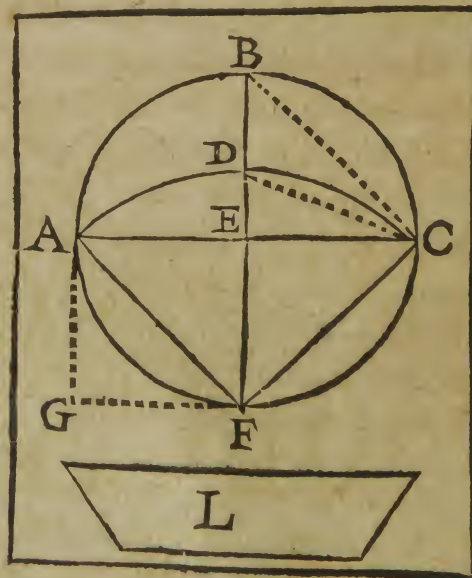
Constat in primis arcum  $ADC$  quartam partem esse peripheriæ sui circuli, est enim angulus  $AFC$  rectus in centro; constat etiam radium  $AF$  eiusdem arcus  $ADC$  esse potentiâ duplum radij  $EA$ , semicirculi  $ABC$ , restat ergo probandum arcum  $ADC$  centro  $E$ , per  $A$  &  $C$  descriptum transire per punctum  $D$ , ita ut abscindat etiam datam latitudinem  $BD$  Lunulæ. Id verò sic manifestum fiet, ducta linea à puncto  $C$  ad punctum  $D$ , in quo terminatur data latitudo  $BD$ , diuidit angulum  $BCA$  bifariam per 3. lib. 6. est enim ut  $BC$  ad  $CE$ ; ita  $BD$  ad  $DE$ : cum ex constructione,  $BD$  sit potentiâ dupla lineæ  $DE$ , sicut  $BC$  dupla est potentiâ lineæ  $CE$ . Sed si ducatur linea ab eodem puncto  $C$  ad punctum in quo recta  $FB$  secatur ab arcu centro  $F$  per  $A$  descripto, idem angulus



us  $BCA$  bifariam etiam secatur; nam angulus  $ACD$  arcui  $AD$  insistenti ad circumferentiam, semissis est anguli  $AFD$  eidem arcui  $AD$  insistentis ad centrum: qui quidem angulo æqualis est angulus  $ACD$ . Ergo linea ducta à puncto  $C$ , tam ad terminum datæ latitudinis  $BD$ , quam ad communem sectionem arcus  $AC$  & lineæ  $FB$ , una eademque linea est. Ergo descripta est Lunula Hippocratis: cuius data est maxima latitudo  $BD$ . Quod erat faciendum.

## P R O P. VII. P R O B L.

Dato excessu  $DE$ , quo radius arcus interioris superat radium semiperipheriæ exterioris, Lunulam componere.

*Figura prima.**Constru*



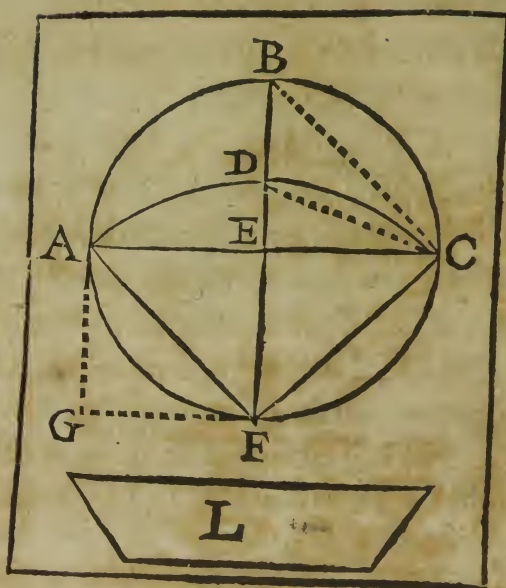
FIGURÆ CYCLICÆ.

9

*Constructio & Demonstratio.*

Reperiatur linea BD, quæ potentiâ sit dupla lineæ *Fig. I.*  
 datæ ED, eique adiungatur, vt fiat tota BE radius  
 semicircumferentiæ ABC exterioris. Sumpta verò  
 EF huic radio æquali, centro F ad distantiam FD  
 arcus describatur: qui necessariò transibit per A & C,  
 & semicirculum abscindet, & arcus ADC erit quar-  
 ta pars peripheriæ centro F descriptæ: nam angulus,  
 AFC rectus est propter duos angulos semirectos,  
 quibus constat. Ergo duæ rectæ à puncto F, quod est  
 in circumferentia circuli centro E per A & C de-  
 scripti, emissæ transeunt per A & C; vt scilicet se-  
 micirculum AFC abscindant, in quo sit angulus  
 rectus AFC: & æquales sunt inter se, sunt enim  
 bases triangulorum EFA, EFC, æqualia latera cir-  
 ca æquales angulos ad E, nempe rectos haben-  
 tium: his verò basibus æqualis est linea FD; quod  
 ita probatur. Ducta linea à puncto C ad terminum  
 D dati excessus ED diuidit angulum BCE bifariam  
 per 3. lib. 6. eò quod sit ex constructione BD poten-  
 tiâ dupla lineæ DE, sicut scilicet est BC potentiâ du-  
 pla lineæ CE: sed linea à puncto eodem C ad com-  
 munem sectionem arcûs centro F per A vel C descri-  
 pti, & lineæ FB,educta, eundem angulum BCE  
 bifariam etiam diuidit, vt mox patebit. Ergo vna ea-  
 démque linea est quæ à puncto C educitur, tam ad-  
 terminum D dati excessûs DE, quàm ad sectionem  
 arcûs AC & lineæ FB: hoc est, arcus centro F per  
 B A de





A descriptus transit per D. Quod autem proximè assumptum est lineam scilicet à puncto C eductam ad sectionem arcûs A C cum lineâ F B, diuidere angulum B C E bifariam; ita probatur. Cum angulus contentus à rectâ C A, & rectâ à puncto C educta ad communem sectionem arcûs A C & rectæ F B, insistat arcui intercepto inter A & rectam F B, qui est semissis quadrantis A C; & sit ipse angulus ad circumferentiam: erit semissis anguli A F B eidem arcui insistentis ad centrum. Est autem angulus A F B æqualis angulo A C B. Ergo & angulus A C B duplus est anguli quem continet recta C A cum recta à puncto C ad communem sectionem arcus A C cum recta F B. Quod cum ita sit: constat rectè solutū esse Problema.

P R O P.



## PROP. VIII. PROBL.

Dato cuius rectilineo æqualem Lunulam Hippocraticam constituere.

*Constructio & Demonstratio.*

Datum sit spatium quodvis rectilineum  $L$  : cui sit *Fig. 1.*  
æqualis Lunula reperienda. Reducatur rectilineum  $L$   
ad quadratum  $A E F G$ , ut docent Elementa. Producto  
verò eius latere  $A E$ , in eoque sumpta  $E C$  æquali ipsi  
 $E A$  describatur centro  $E$  semicirculus  $A B C$ . Tum  
centro  $F$  & radio  $F A$  describatur arcus  $A D C$ . Dico  
statutam esse Lunulam  $A B C D A$  æqualem recti-  
lineo  $L$ .

Quod enim statuta hæc Lunula eadem sit cum  
Hippocratica, patet. Clauditur enim exteriori semi-  
peripheria  $A B C$ , & arcu interiore  $A D C$ : qui est  
quarta pars peripheriæ centro  $F$  descriptæ ob angu-  
lum  $A F C$  in eius centro rectum: quæ requirun-  
tur per Prop. I. ad huiusmodi Lunulæ constitutionem.  
Quod autem Lunula hæc rectilineo  $L$  sit æqualis, con-  
stat. Nam rectilineum  $L$  æquale est per constructionē.  
Quadrato  $A F$ : cui æquale est triangulum  $A F C$  per  
41. lib. I. Sed triangulum  $A F C$  æquale est Lunulæ  
 $A B C D$ . Ergo eidem Lunulæ rectilineum  $L$  est æqua-  
le. Dato igitur cuius rectilineo, &c. Quod faciendum  
erat.

## SCHOLIUM.

*Ex huius Problematis solutione colligitur, nihil in*  
B 2 *Geome*



*Geometria tradi posse circa figuras rectilineas quod huic Hippocraticæ Lunulæ non competat, poterit scilicet in data ratione Lunula huiusmodi minui vel augeri. Poterunt non tantum spatia quolibet rectilinea; sed etiam aliæ quolibet, modi eiusdem Lunulæ in unicam eis æqualem colligi poterit inter duas oblatas Lunulas ratio exhiberi. Poterunt denique reliqua omnia perfici iuxta doctrinam elementorum: quæ circa Quadratum  $AF$  vel triangulum  $AF C$  (quorum utrumque est Lunulæ  $ABCD$  æquale) absoluantur, ut iis tradendis immorandum non sit: sed pergendum ad alia quedam ad hanc figuram pertinentia non minori admiratione digna quam sit prima eius ab Hippocrate constitutio observata: ad quæ sequentibus lemmatis viam sterno faciliorem.*

#### PROP. IX. DEFINITIO.

Similes circulorum sectores sunt quorum anguli ad centrum sunt æquales.

#### EXPOSITIO.

*Fig. II.* Sint duo quicumque circuli; quorum centra sint  $A$  &  $E$  in quibus duo anguli  $O A D, S E I$  æquales inter se statuantur. Erunt iuxta hanc definitionem sectores  $A O D, E S I$  inter se similes.

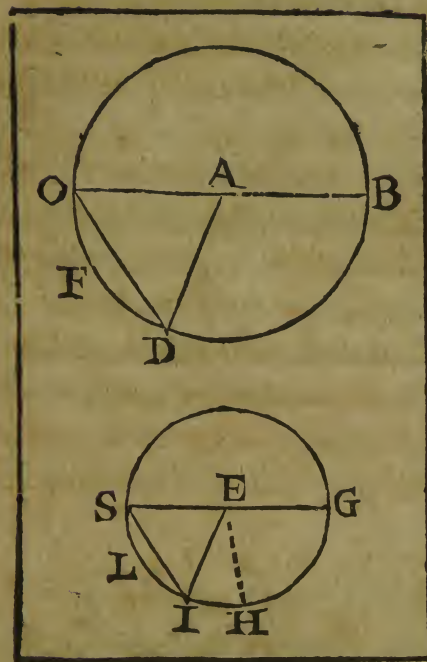
#### PROP. X. DEFINITIO.

Similia circulorum segmenta sunt, quæ continentur arcubus similium sectorum, & rectis arcus illos subtendentibus.

EXP O



Figura Secunda.



## EXPOSITIO.

Scio aliter similia segmenta ab Euclide describi *Fig. 11.*  
 lib. 3. Definit. 10. per proprietatem quam deinde Prop.  
 pos. 21. eiusdem lib. 3. demonstrat segmentis conueni-  
 re; sed hæc mea definitio immediatior mihi visa est,  
 aptior certè & conuenientior tum hætenus traditis  
 tum præsertim deinceps tradendis; sint ergo sectores  
 duorum circulorum similes  $OAD$ ,  $SEI$ , id est, iuxta  
 præcedentem Prop. 9. sint anguli  $OAD$ ,  $SEI$ , æqua-  
 les: arcus verò  $OD$ ,  $SI$  à sectorum lateribus interce-  
 ptos subtendant chordæ  $OD$  &  $SI$ , erunt iuxta hanc  
 definitionem segmenta  $OFD$ ,  $SLI$  inter se similia.

B 3 PROP.



G I S. Nam circuli sunt inter se, vt Quadrata diametrorum vel semidiametrorum A O, E S. Sed vt Quadratum semidiametri A O ad Quadratum semidiametri E S : ita est triangulum A D O ad triangulum simile E I S. Ergo vt circulus ad circulum ; atque adeò per Prop. 11. antecedentem, vt sector A D O ad sectorem E I S : ita est triangulum A D O ex sectore ablatum, ad triangulum E I S ex sectore suo ablatum. Ergo & reliquum segmentum O F D, ita est ad reliquum segmentum S L I, vt totus sector A D O ad totum sectorem E I S ; sed vt sector ille ad hunc sectorem ita est circulus totus B D O ad circulum G I S per Prop. 11. Ergo ita est segmentum O F D ad segmentum simile S L I, vt circulus prior ad posteriorem, quod erat probandum.

## P R O P. XIII. THEOR.

*Fig. 11.* Si fuerit vt circulus B D O ad alium circulum G I S : ita reciproce angulus H E S sectoris ad angulum D A O sectoris prioris circuli : erunt duo sectores D A O, H E S æquales.

*Demonstratio.*

Fiat angulus S E I æqualis angulo O A D ; erit ergo sector O A D ad sectorem S E I vt circulus O D B ad circulum S I G per Prop. 11. hoc est ex suppositione, vt angulus S E H ad angulum O A D, vel ipsi æqualem factum S E I. Sed vt angulus S E H ad angulum S E I, ita est per 33. lib. 6. sector S E H ad sectorem S E I:



SEI: ergo sector SEH ad sectorem SEI eandem habet rationem, quam sector OAD habet ad eundem sectorem SEI: ergo per 9. lib. 5. æquales sunt sectores OAD, & SEH. Quare si fuerit ut circulus ad circulum, &c. quod probandum erat.

PROP. XIV. PROBL.

Lunulam Hippocratis iuxta quamvis datam diuidere per rectam lineam.

Figura Tertia.



Constructio.

Nulli non Geometræ mirum videbitur hîc propositum problema; quo figuræ tam irregularis æquè absoluta diuisio promittitur iuxta quamvis rationem:

C

vt



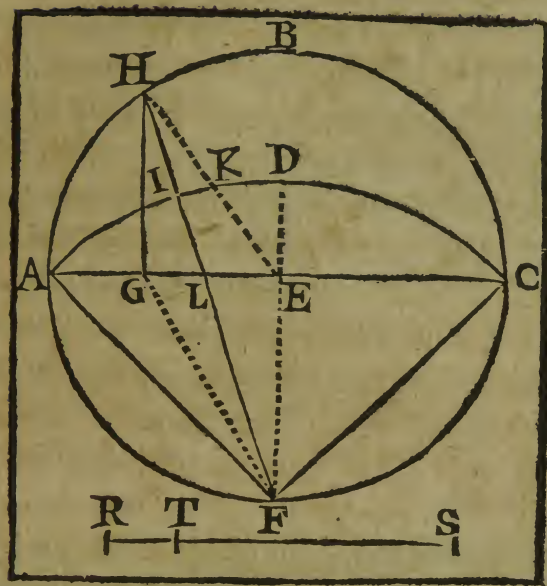
vt liberior non sit rectæ lineæ diuidendæ modus; sed (quod magis mirum) nec difficilior. En vt habet, sit lunula  $ABC$  ita diuidenda vt linea  $RS$  diuisa est in  $T$ . Ducta  $AC$  minoris circuli diameter, ita diuidatur in  $G$ , vt linea  $RS$  diuisa est in  $T$ ; tum per  $G$  agatur  $GH$  perpendicularis ad  $AC$  occurrens in  $H$  peripheriæ circuli  $ABC$ . Denique à centro  $F$  arcûs interioris  $ADC$ , Lunulæ, ad punctum  $H$  destinetur recta  $FH$  secans Lunulam in duas partes: quarum vna est triangulum mixtum  $HCI$ , arcubus  $HBC$ ,  $IDC$  & rectâ lineâ  $HI$  comprehensum; altera est triangulum mixtum  $HAI$ , lineâ item rectâ  $HI$  & duobus arcubus  $AH$  &  $AI$  circumscriptum. Dico prius triangulum  $HCI$  ad posterius  $HAI$ , ita se habere; vt recta  $ST$  se habet ad  $TR$ : siue vt  $CG$  ad  $GA$ .

*Demonstratio.*

Iungantur  $EH$  &  $GF$  sector  $EH C$  æqualis est sectori  $FIC$ , cur ita? quia angulus  $CH E C$  sectoris  $HE C$ , cum sit ad centrum  $E$  circuli  $ABC$ , duplus est anguli  $HFC$  ad circumferentiam; sed angulus  $HFC$  cum sit ad  $F$  centrum circuli  $ADC$ , sitque angulus sectoris  $FIC$ ; cuius circulus est duplus circuli  $ABC$ , ex Prop. 1. & sequentibus, ita se habebit ad angulum  $HE C$ ; vt reciproce circulus  $ABC$  se habet ad circulum  $ADC$ ; vtroque enim reperitur ratio subdupla: ergo per Prop. 13. antecedentem sectores  $HE C$ , &  $IF C$  sunt æquales. Dematur commune vtrique huic sectori triangulum mixtum  $KEC$ , remanebit



Figura Tertia.



remanebit ex sectore  $HEC$ , triangulum mixtum  $HKC$ ; ex sectore verò  $IFC$  reliqua fiet figura polygona conflata ex triangulo  $LFC$  & figura quadrilatera mixta  $LIKE$ . Addatur vtrique, commune triangulum mixtum  $HKI$ , fiet triangulum mixtum  $HCI$  æquale figuræ polygonæ conflatæ ex duobus triangulis  $ECF$  &  $EHF$ . Sed triangulum  $EHF$  æquale est triangulo  $EGF$  (est enim super eadem basi  $EF$  & in eisdem parallelis  $HG, EF$ ) Ergo triangulum mixtum  $HCI$  æquale est triangulo  $GFC$ . Ad hæc cum tota Lunula  $ABCD$ , æqualis sit triangulo  $AFC$ , si ab vtraque hac quantitate æquales demantur quantitates,

C      2      tates,



tates, nempe ex lunulâ, mixtum triangulum  $HCI$ , & ex triangulo  $AFC$ , triangulum  $GFC$ : æquales remanebunt quantitates: nempe triangulum mixtum  $HAI$ , & triangulum  $AGF$ . Et ita se habebit triangulum mixtum  $HCI$  ad triangulum mixtum  $HAI$ ; hoc est, pars lunulæ ad reliquam partem, vt triangulum  $GFC$  ad triangulum  $GFA$ . Sed triangulum  $GFC$  ad triangulum  $GFA$  ita est, vt linea  $GC$  ad lineam  $GA$ . Hoc est, ex constructione vt  $ST$  ad  $TR$ . Ergo vt  $ST$  ad  $TR$ , ita est pars  $HCI$  lunulæ, ad reliquam eius partem  $HAI$ . Diuisa est igitur lunula à linea  $HI$  iuxta rationem datam. Quare lunulam Hippocratis, &c. diuissimus. Quod faciendum erat.

*Aliter.*

*Fig. 3.* Hoc etiam alio modo institui potest eiusdem solutionis demonstratio. Sector  $EHA$  æqualis est sectori  $FIA$  per Prop. 13. Illius enim angulus  $HEA$  duplus est anguli  $IFA$ , sectoris  $FIA$ ; sicut reciproce circulus  $ADC$  duplus est circuli  $ABC$ . Dematur ex illis æqualibus sectoribus triangulum mixtum  $AHL$ : remanebit ex sectore  $EHA$  triangulum mixtum  $AHI$ , & triangulum rectilineum  $EHL$ : ex sectore verò  $FIA$  remanebit triangulum  $FLA$ . Sed triangulum  $ELH$  est æquale triangulo  $GLF$ ; cum enim duo triangu-  
la  $FHE$  &  $FGE$  super eadem basi  $EF$ , & in eisdem parallelis statuantur; æqualia erunt; demptoque communi triangulo  $LEF$ , remanebit triangulum  $ELH$  æquale triangulo  $GLF$ . Demantur ergo  
ex



ex æqualibus illis quantitatibus hæc duo æqualia triangula : remanebit triangulum mixtum  $AHI$  æquale triangulo  $AGF$ . Atque adeò triangulum mixtum  $HCI$  ex Lunula reliquum, æquale erit triangulo  $GCF$ . Secta igitur est Lunula à linea  $HI$  quemadmodum sectum est triangulum  $AFCLunulæ$  æquale, à lineâ  $FG$ . Sed ut triangulum  $AFG$  ad triangulum  $CFG$ ; ita est basis  $AG$  ad basim  $GC$ , hoc est ut linea  $RT$  ad  $TS$  ex constructione. Ergo ut iubetur, secta est Lunula  $ABC$  per lineam  $HI$ .

## COROLLARIA.

*Ex solutione huius Problematis eiusque demonstratione varia solvuntur Problemata eò iucunda magis, quò facilius perficiuntur; quo etiam ægrius solent figurae circulares in rectilinea spatia conuertere. Eorum aliquot hic attingenda sunt: quorum cognitio euadit ex dictis planissima et fusore tractatione non egeant.*

Primum esto. Qualibet ducta linea  $FH$  à puncto  $F$ , Meniscum  $ABCD$  secante in duas partes  $HIA$ ,  $HIC$ ; earum ratio nota euadet, si à puncto  $H$  ducatur  $HG$  perpendicularis ad  $AC$ : eadem enim erit ratio lineæ  $AG$  ad  $GC$ , quæ est trianguli mixti  $HIA$  ad mixtum triangulum  $HIC$ : hæc enim duo mixta triangula sunt æqualia duobus rectilineis triangulis  $GFA$ ,  $GFC$ : quæ sunt inter se, ut eorum bases  $GA$ ,  $GC$ .

Secundum. Poterit à quolibet puncto  $H$  abscindi Menisci pars ad dextram eius vel sinistram: ad quam Meniscus totus datam habeat rationem: Ducta enim  $HG$  perpendiculari ad  $AC$ , sumetur ad dextram vel sinistram ipsius

C 3 G pars



G pars lineæ  $AC$  ad quam ipsa  $AC$  datam habeat rationem: tum ab assumptæ partis termino perpendicularis ad  $AC$  erigetur sectura peripheriam  $ABC$  in puncto: à quo, sicut & à puncto  $H$  directæ lineæ ad  $F$ , intercipient partem Lunule quæsitam, ut ex dictis constat.

Tertium. Dato quouis rectilineo, quod triangulo  $AF C$ , siue Lunula ipsa maius non sit, æquale spatium dari potest in Lunula. Reducetur scilicet rectilineum illud per Elementa in triangulum eiusdem altitudinis cum triangulo  $AF C$  (quæ  
Fig. 3. altitudo est  $FE$ ) eiusque basis assumetur in quacumque parte lineæ  $AC$ : & ab eius extremis erigentur perpendiculares ad  $AC$ . Si enim à punctis in quibus huiusmodi perpendiculares peripheriam  $ABC$  intersecant, ducantur lineæ rectæ: hæ intercipient Lunulæ spatium spatio rectilineo dato æquale.

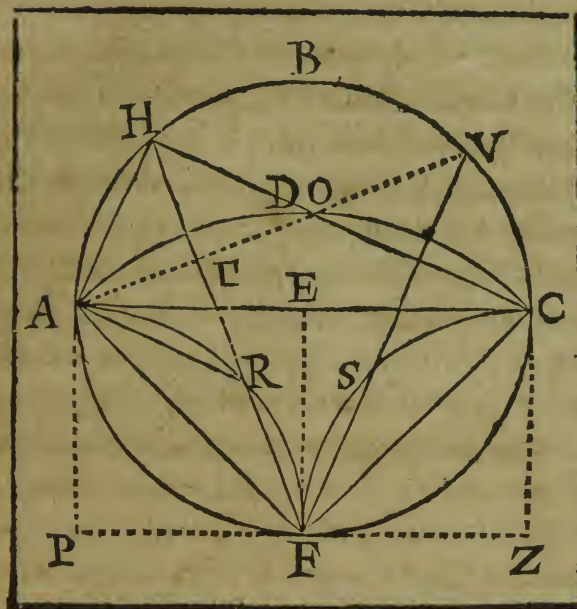
Quartum. Constat quomodo parti cuiusvis Menisci inter duas rectas à puncto  $F$  emissas interceptæ exhiberi possit alia pars æqualis in quouis ipsius Menisci loco; quod referri debet ipsius Lunulæ in quotuis partes æquales diuiso; imò & in quacunque etiam rationem siue rationalem, siue irrationalem, siue maioris, siue minoris inæqualitatis. Secundum mediam & externam, &c. Quæ & alia innumera non minus iucunda, ex dictis leui operâ perfici à quouis Geometra poterunt.

#### PROP. XV. PROBL.

Constitui potest triangulum curvilineum æquale, & isoperimetrum Hippocratico menisco.

Constru





Constructio.

Reperatur figura Propositionis antecedentis. In-  
qua exhibitæ est Lunula Hippocratis  $ABCD$ : & su-  
per duobus radiis  $EA$ ,  $EC$  duo Quadrata construun-  
tur  $EP$ ,  $EZ$ . Tum punctis  $P$  &  $Z$  tanquam centris duo  
arcus per  $A$  &  $C$  describantur  $AF$ , &  $CF$ : qui neces-  
sariò transibunt per  $F$  ambo ob æquales in Quadratis  
lineas  $PA$ ,  $PF$ ; &  $ZC$ ,  $ZF$ ; & in eodem puncto  $F$   
se se mutuo tangent, vterque enim lineam  $FE$  ad ra-  
dios  $FP$ ,  $FZ$  perpendicularem tangit per 16. lib. 3. Dico  
triangulum curvilineum  $FAC$  arcibus  $FA$ ,  $FC$  &  
 $ADC$  circumscriptum, esse æquale Lunulæ  $ABCD$ ,  
ipsique isoperimetrum.

Demons



*Demonstratio.*

Arcus A F centro P descriptus quarta pars est peripheriæ sui circuli ob angulum rectum APF in eius centro eademque est ratio arcûs C F. Duo ergo arcus A F, C F æquales sunt semiperipheriæ A B C. Communis autem Lunulæ & huic triangulo est arcus A D C. Patet ergo triangulum hoc Lunulæ isoperimetrum esse. Probandum superest idem triangulum Lunulæ esse æquale. Segmentum A D C, cui insistit ad centrum angulus rectus, simile est utrique segmento A R F, C S F per Prop. 1. & per Prop. 12. ita se habet ad alterutrum horum segmentorum; ut totus eius circulus ad totum circulum eorundem. Cum ergo circulus A D C duplus sit ex constructione ad circulum A R F siue C S F: erit segmentum A D C duplum segmenti A R F: atque adeo æquale segmentis duobus simul A R F, C S F. Addatur utrique triangulum mixtum linea A C & arcubus A R F, C S F comprehensum: fiet triangulum rectilineum A F C æquale triangulo curvilineo arcubus A D C, A R F, C S F contento. Sed eidem triangulo æqualis ostensa est superius Lunula A B C D. Ergo eidem Lunulæ æquale etiam est triangulum hoc curvilineum. Construi ergo potest triangulum curvilineum Lunulæ Hippocraticæ isoperimetrum & æquale, illudque de facto construximus. Quod fieri debebat.

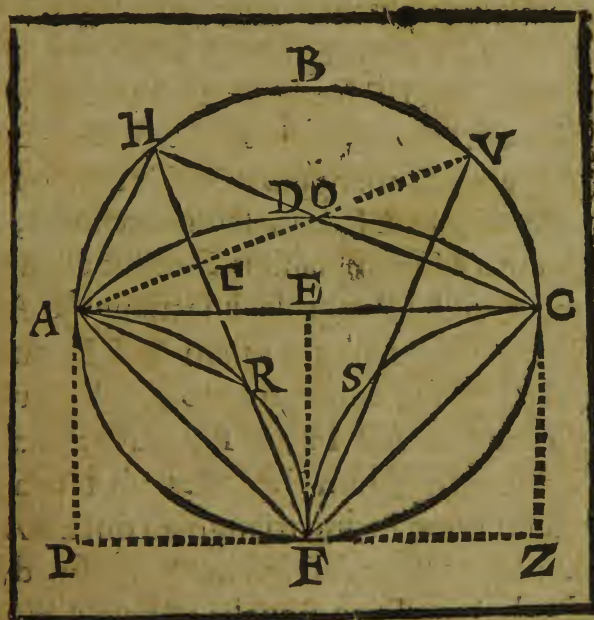
Fig. 4.

P R O P.



## PROP. XVI. THEOR.

Eadem repetitâ figurâ: Linea quælibet FH *Fig. 4.*  
 à puncto F ad exteriorem Lunulæ ambitum  
 educta abscindit partes æquales ab eadem, & à  
 triangulo curvilineo: FAC. Cuiusmodi sunt  
 HAI, & triangulum mixtum AIR. Item  
 HCI, & quadrilaterum mixtum rectâ IR, &  
 arcubus IC, CSF, FR contentum.

*Figura Quarta.**Demonstratio.*

Ductis lineis AH, AR & AT perpendiculari ad  
 FH. Duo segmenta AH, AR æqualia sunt. Duæ  
 enim



enim lineæ  $FA$ ,  $FH$  à puncto  $F$  in circumferentia duorum circulorum æqualium  $FR A$ ,  $FAH$  posito eductæ angulum continent æqualibus arcibus insistentem: quos rectæ  $AH$ ,  $AR$  subtendunt, atque adeo segmenta æqualia abscindunt. Eisdem verò segmentis æquale est semifegmentum  $AIT$ . Est enim arcus  $AI$  similis dimidio arcui  $AH$  vel  $AR$ , eò quod punctum  $F$ , unde lineæ  $FA$ ,  $FH$  exeunt, sit in centro circuli  $AIC$ ; in peripheria verò arcuum  $AH$  &  $AR$ . Producta igitur  $AT$  donec occurrat arcui  $ADC$ , segmentum abscinderet simile segmento  $AH$  vel  $AR$ . Segmentum autem à linea  $AT$  abscissum duplum foret per Prop. 12. Segmenti  $AH$  vel  $AR$ . Ergo semifegmentum  $AIT$  segmento  $AH$  aut segmento  $AR$  æquale est. His positis constat partem Lunulæ  $HAI$  æqualem esse triangulo  $HAT$ : addito scilicet mixto triangulo  $HAI$ , tam segmento  $AH$ , quam semifegmento  $AIT$ . Æqualibus. Constat etiam triangulum mixtum  $AIR$  æquale esse triangulo  $ATR$ : addito nimirum triangulo mixto  $ATR$  tam segmento  $AR$ , quàm semifegmento  $AIT$  æqualibus. Sed duo triangula  $ATH$ ,  $ATR$  sunt æqualia. Est enim  $AHR$  triangulum Isosceles ob latera  $AH$ ,  $AR$  æqualia: quod in duo triangula æqualia  $ATH$ ,  $ATR$  diuiditur à lineâ  $AT$  à vertice ad basim deductâ perpendiculariter. Ergo æqualis est pars  $AHI$  lunulæ, ostensa æqualis triangulo  $ATH$ , triangulo mixto  $ATR$  ostenso æquali, triangulo  $ATR$ . Abscindit igitur linea quælibet  $FH$  à centro  $F$  circuli  $ADC$ ,  
ducta

Fig. 4.



# FIGVRÆ CYCLICÆ. 27

deducta ad peripheriam  $ABC$ , ex Lunula  $ABCD$  & ex triangulo curvilineo  $FAC$ . Spatia duo cornui  $A$  adhærentia, æqualia. Vnde necessariò sequitur reliqua duo spatia versus  $C$  ab eadem linea  $FH$  abscissa, æqualia etiam fore. Si enim à Lunula & triangulo curvilineo æqualibus per Prop. 15. Demantur partes proximè ostensæ æquales: reliquas æquales esse necesse est. Quare. Linea quælibet  $FH$ , &c. Quod demonstrandum erat.

## COROLLARIUM.

*Ex præcedentibus colligitur totum triangulum curvilineum semiperipheriâ  $ABC$  & arcubus duobus  $FRA$ ,  $FSC$  comprehensum (quod quidem toti circulo  $ABCF$  isoperimetrum est) diuidi posse iuxta quamvis datam rationem. Si enim vel Lunula  $ABCD$ , vel triangulum curvilineum  $FRADBSF$  in data ratione diuidatur ut traditum est in superioribus, per lineam  $FH$  verbigratiâ. Eadem linea totum illud triangulum in eadem ratione diuidet, ut ex dictis constat.*

## PROP. XVII. THEOR.

In eadem figura si linea  $AT$  producat<sup>Fig. 4.</sup>ur donec circulo  $ABC$  occurrat in  $V$ : ad quod ex  $F$  linea educatur. Dico triangulum  $TFV$  æquale esse parti  $HCI$  Lunulæ, quam  $FH$  linea abscindit ad partes  $C$ . Vel etiam parti trianguli curvilinei  $FAC$  ad easdem partes  $C$  abscissæ.

D 2

Demon



*Demonstratio.*

*Fig. 4.* Iungatur recta CH. Angulus AVF est semirectus; semissis scilicet anguli recti AEF ad centrum E eidem arcui AF insistentis. Ergo in triangulo TVF, alter eius angulus TFV semirectus etiam erit: atque adeò triangulum hoc simile est tam triangulo ATH quam triangulo AFC. Ad hæc. Basis FV æqualis est lineæ CH. Nam cum angulus semirectus HFV insistant arcui HV: erit arcus hic quarta pars peripheriæ totius circuli: qualis est etiam arcus CF. Si igitur arcubus æqualibus HBV, FC addatur arcus CV: erunt duo arcus HVC, FCV æquales. Ergo & lineæ FV, CH arcus illos subtendentes, æquales erunt. Quod cum ita sit: sitque angulus AHC rectus: erit triangulum AFC super basi AC trianguli AHC æquale triangulo ATH simili super latere AH: & simul triangulo simili, quod super latere HC erigeretur. Hoc est triangulo VTF: quod & simile ostensum est triangulo HTA; & eius basis VF probata æqualis lineæ HC. Cum igitur Lunula ABCD æqualis sit triangulo AFC; æqualis etiam erit duobus triangulis HTA, VTF. Sed triangulum HTA æquale est Lunulæ parti HAI à linea FH abscissæ. Ergo altera eiusdem Lunulæ pars HCI ab eadem FH abscissa, æqualis erit triangulo VTF. Quod etiam necesse est æquale esse parti abscissæ versus C trianguli curvilinei FAC; quæ arcubus IC, CSF, FR, & recta RI comprehenditur. Cum enim triangulum hoc curvilineum æquale sit



fit perinde vt Lunula, duobus triangulis HTA, VTF. Sit autem triangulum mixtum æquale ostensum triangulo HTA : erit reliqua pars curuilinei illius trianguli, æqualis triangulo VTF. Quare. Si linea AT producat, &c. Quod erat probandum.

## COROLLARIUM.

Ex dictis colligitur, eductam lineam quamlibet à puncto F, & tam Lunulam quam triangulum curuilineum ACF secantem, cuiusmodi est recta FH : ita diuidi in puncto T à linea, quæ ab alterutro cornu Lunule, verbi gratia, A, ad ipsam ducitur ad angulos rectos : vt partium Quadrata & simul æqualia sint Lunulæ & simul triangulo curuilineo. Et Quadrata singula singulis duabus partibus à linea ipsa FH factis. Nam tam Lunula ABCD, quam triangulum curuilineum FAC, æqualia sunt duobus triangulis HTA, VTF. Sed triangulum HTA semissis est Quadrati super latere HTA erecti, vt patet, eodemque iure triangulum VTF semissis est Quadrati super latere TF constructi. Ergo Lunula & triangulum curuilineum simul, æqualia sunt duobus Quadratis simul partium TH & TF lineæ FH. Deinde quia tam Lunulæ pars HIA, quam triangulum mixtum AIR abscissum à curuilineo triangulo FAC, æqualia sunt separatim sumpta triangulo HTA : euidentis est, si simul sumantur, qualia esse. Quadrato lateris TH : eodemque modo pars altera versus C abscissa æqualis erit Quadrato lateris TF.







puncto T bifariam secabit; erit igitur TO æqualis lineæ TH; cui superius TA æqualis ostensa est. Ac proinde ducta HO cum lineâ HT, angulum semirectum continebit fiet enim triangulum HTO æquale & simile triangulo HTA: cuius anguli H & A sunt semirecti. Sed lineæ HC cum lineâ eadem HTF angulum etiam semirectum CHF continet: eò quod angulus CHF semissis sit anguli recti CEF ad centrum eidem arcui FC insistentis. Ergo lineæ HO & HC eadem sunt lineæ: atque adeo AO & HC in eodem puncto O arcus ADC se interfecant. Ac proinde angulus HOT, quem lineæ HO cum lineâ OA continet, est semirectus, hoc est, æqualis semirecto HAO. Ergo duo latera HA, HO æqualia sunt. Quod cum eodem modo demonstrari possit, quæcunque tandem lineæ FH ducatur: patet verum semper fore. Quod, si à duobus Lunulæ cornibus A & C, &c. Quod erat probandum.

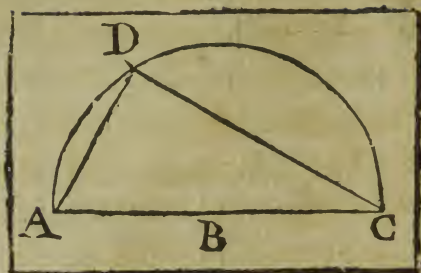
## PROP. XIX. PROBL.

Datâ lineâ aliam definire, quæ triplum eius possit.

Alterius cuiusdam Lunulæ constructionem hic instituo: quæ non minus quam præcedens iucunda videatur; magis etiam aliquantò subtilior & exquisitior. Ad huius autem delineationem quædam tum Theoremata, tum Problemata necessaria sunt: quorum hoc primum esto.

*Constructio.*



*Constructio.*

*Fig. 5.* Data sit linea AB. Producaturs ita ut BC æqualis fiat ipsi AB. Tum centro B per A semicirculus describatur: cui applicetur AD æqualis ipsi AB. Denique iungatur CD. Dico CD triplum posse lineæ datæ AB.

*Demonstratio.*

Quadratum lineæ AC quadruplum est Quadrati AB siue AD. Sed Quadratum AC est æquale Quadratis AD, DC. Ergo duo Quadrata AD, DC quadrupla sunt Quadrati AD. Ergo Quadratum DC triplum est Quadrati AD. Quare inuenta est linea DC quæ triplum possit lineæ datæ AB. Quod faciendum erat.

## P R O P. XX. P R O B L.

Datis duabus lineis: quarum maior possit triplum minoris; trapezium construere: cuius tria latera minori æqualia sint; & angulum ad maiorem constituent æqualem.

*Constru*



Figura Sexta.

*Constructio.*

Datarum linearum maior sit  $CD$ , quæ bifariam in *Fig. 6.*  
 $E$  diuidatur: diuisa etiam bifariam minore  $AB$ , pars  
 eius altera sit  $EA$ , altera  $EB$ . Deinde à punctis  $A$  &  
 $B$  rectæ erigantur  $AF$ ,  $BG$  indefinitæ longitudinis,  
 & ad  $CD$  perpendiculares. Tum centris  $C$  &  $D$  ad  
 distantiam datæ minoris lineæ  $AB$  arcus describan-  
 tur lineas  $AF$ ,  $BG$  secantes in  $F$  &  $G$  denique iun-  
 gantur  $CF$ ,  $FG$ ,  $GD$ . Dico Trapezium  $CFGD$  quæ-  
 stioni satisfacere.

*Demonstratio.*

Duo triangula  $FAC$ ,  $GBD$  habent duo latera  
 $CF$ ,  $CA$  duobus  $DG$ ,  $DB$  ex constructione æqua-  
 lia & angulos  $A$  &  $B$  æquales nempe rectos. Et reli-  
 quos  $F$  &  $G$  minores recto. Ergo per 7. lib. 6. Sunt  
 æquiangula: ac proinde per 4. lib. 6. ut  $CA$  ad  $AF$   
 ita est  $DB$  ad  $BG$ . Sed  $CA$ ,  $DB$  sunt æquales. Ergo  
 æquales etiam sunt  $AF$ ,  $BG$ . Quæ cum sint parallelæ:  
 erunt etiam duæ  $FG$ ,  $AB$  parallelæ & æquales. Tres  
 ergo lineæ  $CF$ ,  $FG$ ,  $GD$  sunt æquales datæ minori  
 E lineæ

lineæ  $AB$ : & duo anguli  $FCA$ ,  $GDB$  ostensi sunt æquales. Ergo Trapezium iuxta petitas condiciones constructum est. Quod erat præstandum.

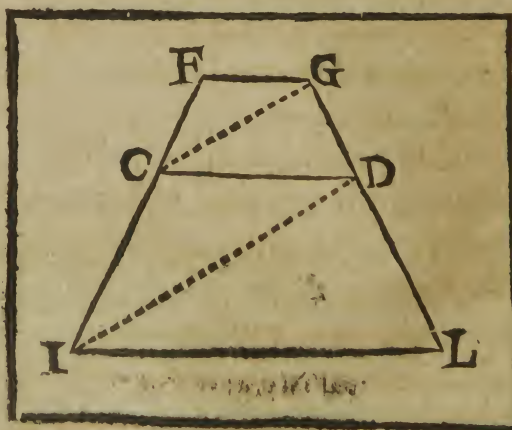
## COROLLARIUM.

*Colligitur ex Problematis solutione latus  $FG$  maiori datæ lineæ  $CD$  oppositum semper fore in id generis Trapezij parallelum eidem maiori datæ lineæ  $CD$ . Id enim inter demonstrandum collectum est.*

## PROP. XXI. THEOR.

Si Trapezij Prop. antecedente constructi latera ultra basim  $CD$  producantur: & in eis abscindantur lineæ  $CI$ ,  $DL$  æquales ipsi basi  $CD$ : ac tandem iungantur  $IL$ , rectâ lineâ. Dico Trapezium  $CDLI$  esse priori  $FGDC$  simile.

Figura Septima.



## Demonstratio.

**Fig. 7.** Ducantur utriusque Trapezij diametri  $GC$ ,  $DL$ . Constat ergo in primis angulos  $ICD$ ,  $CFG$  æquales esse,



esse, sicut & LDC, DGF propter parallelas FG, CD, in quibus illi interni, hi externi sunt. Constat etiam latera FG, FC & CD, CI: item FG, GD; & CD, DL æquales illos angulos continentia esse proportionalia, in ratione nimirum æqualitatis. Deinde cum duo triangu- la FGC, CDI habeant duo latera angulos F & C æquales continentia, proportionalia: erunt æquiangu- la: anguli scilicet FGC, & CDI æquales erunt. Quibus demptis ex æqualibus FDG, CDL: æquales remanebunt CGD, IDL. Quia igitur in triangulis CGD, IDL anguli G & D sunt æquales; & circa illos latera GD, GC; & DL, DI proportionalia proportionalia enim erant FG (cui æqualis est GD) GC; & CD (cui æquale est DL) DI, in triangulis FGC, CDI. Ergo hæc triangu- la GDC, DLI æquiangu- la sunt: ita ut angulus GDC sit æqualis angulo DLI. Ergo DC & LI sunt lineæ parallelæ: & præterea latera GD, DC & DL, LI sunt proportionalia: atque adeò FC, CD; & CI, IL. Quare cum duo hæc trapezia habeant & angulos om- nes singulos singulis æquales; & latera circa æquales angulos proportionalia: similia sunt inter se. Quod erat probandum.

PROP. XXII. THEOR.

Isdem positis. Trapezium CL ad Trapezium FD triplam habet rationem.

*Demonstratio.*

Latus CD Trapezij CG, potest triplum lateris FG *Fig. 7.*

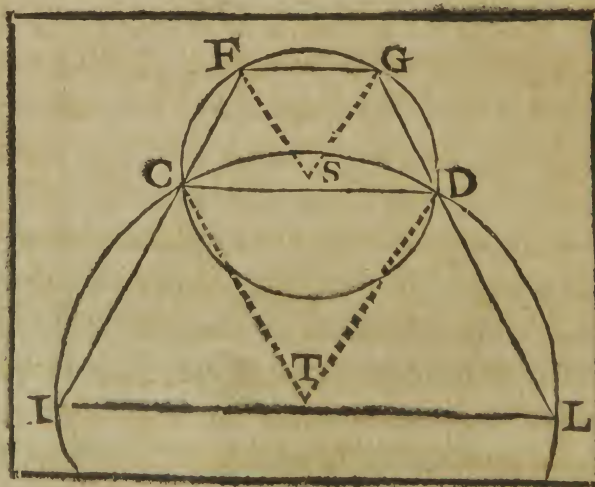
E 2 ex



ex constructione. Ergo etiam latus  $IL$  Trapezij  $ID$  triplum potest lateris  $CD$ . Eadem enim proportio laterum homologorum in similibus figuris. Sed ut Quadratum super  $IL$  ad Quadratum super  $CD$ : ita est Trapezium  $ID$  super  $IL$ , ad Trapezium  $CG$  simile super  $CD$  similiterque constitutum. Ergo sicut Quadratum  $IL$  triplum est Quadrati  $CD$ : ita Trapezium  $ID$  triplū erit Trapezij  $CG$ . Quod erat demonstrandum.

## P R O P. XXIII. THEOR.

Iisdem positis. Circa utrumque Trapezium circulus describi potest: & circulus circa maius descriptus, circuli circa minus descripti triplus est.

*Figura Octava.**Demonstratio.**Fig. 8.*

Quod possit circulus circa hac Trapezia describi,  
qui



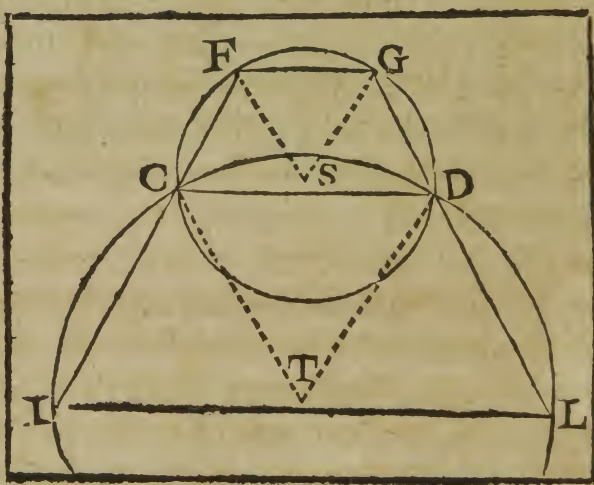
qui scilicet per omnes eorum angulos transeat, eu-  
dens est, ex eo quod duæ lineæ  $FG$ ,  $CD$  sint paral-  
lelæ: in quas incidens recta  $FC$  duos angulos inter-  
nos  $FCD$ ,  $CFG$  duobus rectis æquales facit. Sed  
angulus  $FCD$  æqualis est angulo  $GDC$  ex primâ  
huiusmodi Trapezij constitutione. Ergo duo anguli  
 $CFG$ ,  $CDG$  in hoc Quadrilatero oppositi sunt duo-  
bus rectis æquales. Ac proinde circa illud circulus de-  
scribi potest. Eadem est ratio alterius Trapezij  $CL$ .

Describantur ergo huiusmodi circuli; & centrum Fig. 8.  
quidem minoris Trapezij sit  $S$ , maioris autem  $T$ . Vnde  
ducantur radij  $SF$ ,  $SG$ : &  $TC$ ,  $TD$ . Quia igitur an-  
guli  $DCF$ ,  $LIC$  sunt æquales ad circumferentiam,  
insistent similibus arcubus  $FGD$ ,  $CDL$ . Ergo eo-  
rum arcuum semisses  $FG$ , &  $CD$  similes etiam erunt.  
Vnde fit vt anguli  $FSG$ ,  $CTD$  arcubus  $FG$ ,  $CD$  in-  
sistentes ad centrum sint æquales. Quod cum ita sit  
triangula  $FSG$ ,  $CTD$  habentia latera circa æquales  
angulos  $S$  &  $T$  proportionalia, erunt inter se æquian-  
gula. Quare ita erit  $TC$  ad  $CD$ ; vt  $SF$  ad  $FG$ . Et per-  
mutando, ita erit radius  $TC$  ad radius  $SF$ , vt  $CD$  ad  
 $FG$ . Sed  $CD$  est linea potestate tripla lineæ  $FG$ . Ergo  
& radius  $TC$  potestate triplus erit radij  $SF$ . Cum ve-  
rò circuli ita se habeant per 2. lib. 12. vt diametrorum,  
aut etiam semidiametrorum Quadrata: erit circulus  
 $ICDL$ , circuli  $CFGD$  triplus. Ergo. Circa vtrum-  
que Trapezium, &c. Quod erat probandum.



## P R O P. XXIV. THEOR.

In eadem figura. Totum segmentum ICDL  
maioris circuli, totius segmenti CFGD circuli  
minoris triplura erit: & singula segmenta ab  
Applicatis tribus IC, CD, DL abscissa tripla  
erunt singulorum trium segmentorum ab Ap-  
plicatis CF, FG, GD abscissorum.

*Figura Octava.**Demonstratio.*

*Fig. 8.* Cum segmenta similia diuersorum circulorum  
eandem habeant rationem inter se quam ipsi circuli  
per Prop. 12. constet verò dicta segmenta esse similia  
ex ante dictis: constat perinde singula segmenta IC,  
CD, DL tripla esse singulorum segmentorum CF  
FG, GD. Siquidem circulus ICDL, circuli CFGD  
ostensus



FIGURÆ CYCLICÆ. 39

ostensus est Prop. antecedente triplus. Quare totum segmentum, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXV. THEOR.

In eadem figura. Lunula, quam externa peripheria  $CFGD$ , & interna  $CD$  comprehendunt; æquales est Trapezio  $FGDC$ .

*Demonstratio.*

Huc spectarunt fere omnia, quæ à Proposit. 19. ad Fig. 8. hanc usque demonstrata sunt. Aliam enim Lunulam ab Hippocratica diuersam construere propositum erat: quod hac Prop. vel præstatur: vel saltem præstandi modus aperitur ex eius demonstratione: quæ ex dictis clarissima est. Cum enim Prop. antecedente ostensum sit segmentum  $CD$ , à linea  $CD$  in circulo maiore applicata abscissum, triplum esse segmenti similis  $FG$  ab applicata  $FG$  in circulo minore abscissi: sint autem duo alia segmenta  $FC$ ,  $GD$  segmento  $FG$  æqualia: constat segmentum  $CD$  æquale esse tribus illis segmentis simul sumptis. Addatur ergo mixtum spatium commune, quod lineis rectis  $CF$ ,  $FG$ ,  $GD$  & arcu  $CD$  circumscribitur: fiet Trapezium  $FD$  æquale Lunulæ  $CFGDC$ . Patet ergo Propositum.

SCHOLIUM.

*Huc singulare Problema afferendum non est quo Meniscus huiusmodi statuatur: cum ex dictis, eius componendi modus apertissimus sit. Præsertim cum datur linea minor,*  
*ad*



ad quam maior potentiâ sit tripla. Id enim Prop. 19. traditum est. Quod si daretur linea, quæ ad alteram potentiâ esse deberet tripla: quamquam ex Elementis id facîle perfici possit: hunc tamen modum hic obiter accipe.

Figura Nona.

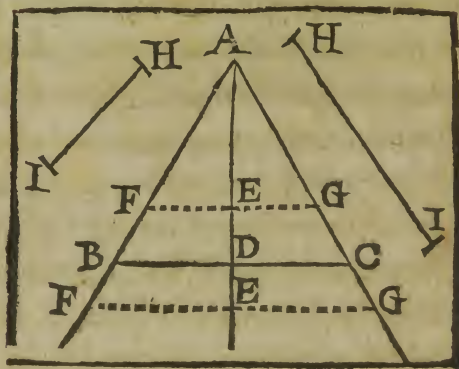


Fig. 9. Data sit linea HI. In quocumque triangulo æquilatèro ABC, ducatur perpendicularis AD ab angulo A ad latus BC: & in ea sumatur AE æqualis datæ lineæ HI: & per E ducatur FG parallela lateri BC. Erit EF, vel EG ea, quæ inuestigatur. Est enim triangulum AFG æquilaterum: in quo ducitur AE perpendicularis ad latus FG. Ergo AE hoc est, HI est potentiâ tripla lineæ EF, vel FG. Linea enim AF potest lineas AE & EF. Sed eadem AF, cum sit æqualis lineæ FG, potest Quadruplum lineæ EF, quæ est illius semissis. Ergo AE potest eiusdem EF triplum. Quod si neutra linearum, quæ Trapezium componere debent futurum æquale Lunule, daretur: sumere tunc licebit cuiuscunque trianguli æquilatèri perpendicularèrem ab aliquo eius angulo ad latus oppositum ductam & semissèrem lateris trianguli.

Illa



*Illā enim perpendicularis triplum potest semissis lateris triangulum constituentis.*

Obſervare præterea licet, tum in huius novæ Lunulæ conſtitutione: tum in Lunula Hippocratica: eandem eſſe proportionem potentiæ diametri ſive ſemidiametri aut etiam Applicatæ ſegmentum abſcindentis circuli maioris ſive interni; ad diametrum ſive ſemidiametrum aut Applicatam ſegmentum circuli minoris ſive externi ſimile ſegmento abſciſſo maioris circuli abſcindentem: quæ eſt reciprocè numeri ſegmentorum circuli minoris ſegmento maioris æqualium. Ita vides in figura huius Propoſitionis lineam *CD* abſcindentem ſegmentum *CD* maioris circuli ſive interni, poſſe triplum lineæ *CF* abſcindentis ſegmentum *CF* ſimile ſegmento *CD*. Fig. 9.  
Sed viciffim tria requiruntur ſegmenta in minori circulo ſimilia ſegmento *CD* maioris; quæ ſimul ipſi ſegmento *CD* ſint æqualia. Similiter in Lunula Hippocratis Prop. 2 delineata radius *FA* maioris circuli ſive interni duplum potest radij *EA* minoris ſive externi circuli *ABC*. Vel recta *AC* ſegmentum *ADC* maioris circuli abſcindens, duplum potest rectæ *AF* (cui æqualis foret, ſi duceretur; recta *AB*) ſegmentum ſimile minoris circuli, abſcindentis. Sed viciffim numerus ſegmentorum minoris circuli, duplus eſt ad ſegmentum maioris, ut illa ſimul huic ſint æqualia. Quod ſi daretur ars Geometrica, qua aliæ eius generis Lunulæ definiri poſſent ſpatijs rectilineis æquales: idem ſemper obſervaretur ut etiam annotavit R. P. Lalouera lib. I. Prop. 25. operis ſubtiliſſimi tetragonismiſicorum Elementorum. Ut ſi, quemadmodum nos Trapezium ſive quadrilaterum tribus lateribus æqualibus conſtans conſtruximus Lunulæ æquale ars nota  
F foret



foret, quâ pentagonum quatuor lateribus equalibus & quinto maiore comprehenderetur: deberet quintum illud latus esse potentiâ quadruplum singulorum quatuor laterum equalium: ut scilicet quintum illud latus segmentum ex circulo maiore siue interno abscinderet quadruplum segmenti similis à singulis quatuor lateribus equalibus ex minore circulo siue externo abscissi. Idem in hexagono & reliquis deinceps polygonis contingeret. Sed horum polygonorum constituendorum ratio Geometrica nondum innotuit, nec nisi summa cum difficultate nosci posse censeo cum ex varia angulorum constitutione pendeat, quam summè difficilem experiuntur Geometrae. Quod si per numeros agendum sit: poterit alijs & alijs adhibitis ad veros vel veris proximos, tentando tandem deueniri, quorum ope Lunula construatur rectilineo polygono aequalis. Exemplum vnicum plurium instar hic in medium afferam: In quo Lunulam exhibebo aequalem rectilineo pentagono: cuius quatuor latera sint equalia; quintum verò esse debet singulorum quadruplum potentiâ, siue duplum longitudine: ut scilicet potentia maioris lateris quadrupla sit potettie singulorum minorum laterum: sicut vicissim numerus minorum laterum quadruplus est numero, (qui unitas est) maioris lateris: ut paulo ante annotavi. Iuvat demum Problema illud in seriem propositionum reponere. Sit ergo.

Fig.8.

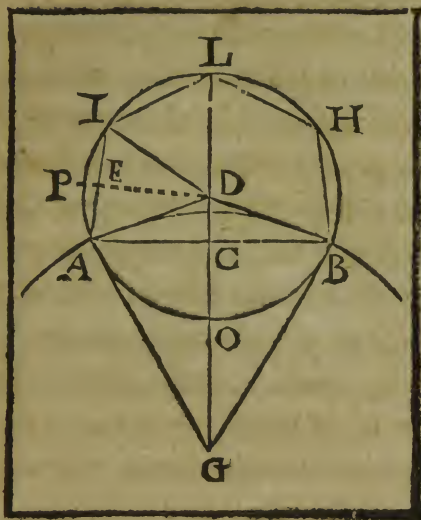
## P R O P. XXVI. P R O B L.

Meniscum rectilineo pentagono æqualem ope numerorum delineare.

Construo



Figura Decima.

*Constructio.*

Sit circulus, cuius centrum D, diameter L O radius D O. Fiat angulus ADO  $68^{\circ} 49' 55'' 20'''$  & à puncto A ducatur ACB ad radium D O perpendicularis in C. Deinde super AB fiat triangulum Isosceles AGB: cuius duo latera æqualia sint diametro L O circuli. Tum centro G per A & B circulus describatur: cuius arcus AB est internaperipheria Lunulæ, quam cum arcu AB constituit externa peripheria ALB denique diuisis arcibus LA, LB bifariam, illo in, L isto in H, Applicentur rectæ AI, IL, LH, HB. Dico pentagonum hoc rectilineum Lunulæ esse æquale.

Fig. 10.

F 2

Demon

*Demonstratio.*

Certum est in primis circulum centro G descriptum per A & B Quadruplum esse circuli minoris centro D per A & B itidem descripti. Est enim per constructionem radius G A circuli maioris duplus radij D A circuli minoris. Quod igitur per numeros nosci debet, est primò, sectorem D I A similem esse sectori G A B. Secundò, inuestigandum est an chordæ A I, I L, &c. æquales sint lineæ A C: atque adeo, an A B dupla sit figillatim chordarum illarum, sicut & dupla est rectæ C A. Vtrumque sic innotescet diuiso arcu A I bifariam in P, ducatur D P: quæ & bifariam & ad angulos rectos chordam A I secabit: eritque R A sinus arcûs P A, siue anguli P D A. Iam quoniam arcus A O positus est  $68^{\circ} 49' 55'' 20'''$ ; erit arcus A I L  $111^{\circ} 10' 4'' 40'''$  qui habetur dempto A O ex semicirculo L A O  $180^{\circ}$ . Arcus ergo A P, qui semissis est arcûs A I, erit  $27^{\circ} 47' 31'' 10'''$  cuius sinûs est A R partium 466 2629. Sed huius sinûs dupla est recta A C, siue sinus arcûs A O  $68^{\circ} 49' 55'' 20'''$ . Hæc enim partium est 9325 259. Ergo lineæ A C, æqualis est chorda A I, atque adeò chordæ reliquæ I L, L H, H B: quarum singularum dupla erit recta A B, & earumdem, potestate erit ipsamet quadrupla. Habemus igitur rectilineum pentagonum A I L H B A, cuius maius latus A B est potentiâ quadruplus singulorum minorum laterum. Quod verò sector G A B similis sit sectori D A I, & reliquis tribus insequentibus, sic ostenditur

Fig. 10.





æquale quatuor illis segmentis  $AI, IL$ , &c. Addatur utrique huic quantitati æquale spatium mixtum, arcu  $AB$  & rectis  $AI, IL, LH, HB$  comprehensum: fiet Lunula  $ALB$  æqualis rectilineo pentagono  $AILHB$ . Rectè igitur per numeros delineatum est rectilineum pentagonum Menisco æquale. Quod erat faciendum.

## M O N I T U M.

*Possent eius generis plures Lunula rectilineis spatijs & ex parte regularibus æquales tentando inuestigari per numeros: cum id Geometrica ratio nulla hætenus præstare potuerit. Sed viam ad illud assequendum præcedente exemplo, cui reliqua omnia per similia non possunt non esse, aperuisse sufficiat. Subiungam impostum alias aliquot compositiones figurarum quæ ambitu clauduntur magis irregulari; quæque curvis constant, vel partim curvis, partim rectis lineis: nullas tamen adducam; in quibus aliquid singulare, vel ratione materiae, vel demonstrationis, observare non liceat. Hinc ordior.*

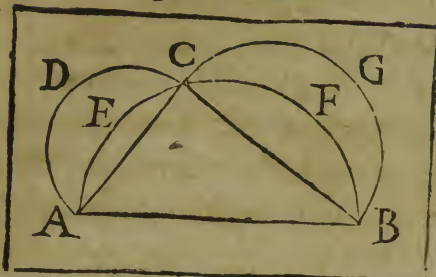
## P R O P. XXVII. P R O B L.

Triangulo cuicunque rectangulo duos simul Meniscos æquales constituere.

*Constructio.*

*Fig. 11.* Sit triangulum  $ACB$ : cuius angulus  $C$  rectus ponatur. Super basi  $AB$ , semicirculus  $ACB$  describatur: qui necessariò per angulum rectum  $C$  abiturus est. Describantur etiam super latera  $CA, CB$  semicirculi





circuli  $CDA$ ,  $CGB$ : horum peripheriæ vnâ cum arcubus prioris circuli super basim descripti duos Meniscos efformabunt  $CDAEC$ ,  $CGBFC$ : quos simul sumptos, æquales esse dico triangulo rectangulo  $ACB$ .

*Demonstratio.*

In triangulo rectangulo  $ACB$ , Quadratum super basi  $AB$ , æquale est Quadratis super lateribus  $CA$ ,  $CB$ . Sed circuli & semicirculi ita se habent, vt diametrorum Quadrata. Ergo semicirculus  $ACB$  duobus semicirculis  $CDA$ ,  $CGB$  est æqualis. Demptis ergo segmentis communibus  $CEA$ ,  $CFB$  remanet triangulum  $ACB$  æquale duobus Meniscis  $CDAE$ ,  $CGBF$ . Quare triangulo rectangulo duos Meniscos æquales constituimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

*Si triangulum rectangulum  $ABC$  foret Isosceles: duæ Lunule, æquales inter se forent, nec ab Hippocratica discreparent; singulisque spatium æquale rectilineum in triangulo  $ACB$  assignari posset. Quandiu verò huiusmodi triangulum*  
 $ABC$



*ACB* scalenum proponetur : non leuiori opera singulis Lunulis spatium æquale abscindi potest ex triangulo , quam circulus in Quadratum conuerti.

Constat porro omne rectilineum in duas huius generis Lunulas conuerti posse : si nimirum prius conuertatur in triangulum quodcunque rectangulum : cui deinde duæ Lunulæ æquales reperiantur. Constat etiam duabus huiusmodi Lunulis alias binas & binas æquales numero infinitas exhiberi posse : non secus ac triangulo rectangulo , triangula rectangula æqualia numero infinita promptum est exhiberi. Constat etiam Meniscos huiusmodi augeri , minuiue posse in data quauis ratione : si triangulum *ACB* in eadem ratione augeatur , vel minuatur.

P R O P. XXVIII. THEOR.

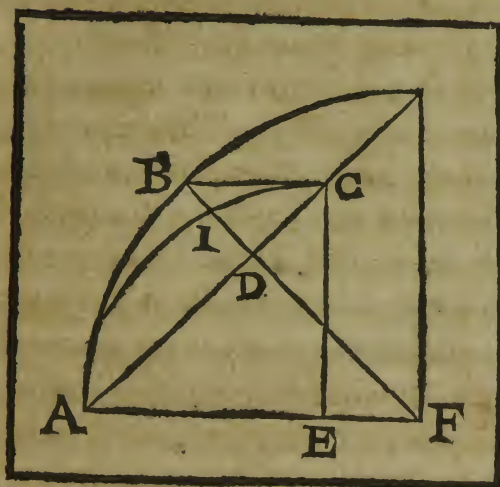
Si duo circuli , quorum vnus alterius sit duplus , sese tetigerint interiùs : & minoris Quadrans cum maioris parte octaua , lineâ rectâ iungatur : fiet triangulum mixtum duobus arcibus & rectâ lineâ illâ circumscriptum , æquale triangulo rectangulo Ifofceli super eadem rectâ lineâ tanquam base constructo.

E X P O S I T I O.

Fig. 12.

Duo circuli *AB* , *AC* , quorum ille sit huius duplus , sese in *A* tangent interiùs. Sit verbò arcus *AB* totius peripheriæ pars octaua & arcus *AC* , Quadrans : quos arcus iungat recta linea *BC* : super qua





qua tanquam base construatur triangulum Iſoſceles  
rectangulum  $BD C$ . Dico triangulum hoc æquale  
eſſe triangulo mixto  $ABC$ , arcubus  $AB$ ,  $AC$  & re-  
ctâ  $BC$  comprehenſo.

*Preparatio.*

Circularum centra E, & F rectâ lineâ iungantur; quæ necessariò in contactum A cadet. Ducantur etiam circularum radij E C, F B. Ducatur denique chorda A C. Certum est primò radium C E rectum esse ad radium A E; insistit enim angulus A E C ad centrum arcui A C; qui ex hypothese est circuli Quadrans. Certum est secundò chordam A C æqualem esse radio F B. Cum enim circulus A B sit ex hypothese duplus circuli A C: sit autem circulus radio A C descriptus, duplus eiusdem circuli A C, eò quod circuli per



Fig. 12. 2. lib. 12. sint inter se vt Quadrata diametrorum, aut etiam semidiametrorum; & Quadratum AC sit duplum Quadrati EA vel EC, cum sit vtrique simul æquale:) non poterunt non esse æquales rectæ AC, FB. Hinc certum fit tertio æquales esse inter se tum DA, DF; tum DB, DC. Nam angulus CAE semirectus, est æqualis semirecto angulo AFB: hic enim ad centrum insistit arcui AB, qui ex suppositione est pars octaua totius circuli sui. Ergo in triangulo ADF duo latera DA, DF, sunt æqualia: quibus ablatis ex æqualibus lineis AC, FB, æquales remanere necesse est duas DB, DC. Hinc constat quarto angulum BDC rectum esse. In triangulo enim ADF, cum duo latera DA, DF æqualia ostensa sint; & ostensi æquales anguli A & F, scilicet semirecti; non potest non esse rectus angulus ADF atque adeo ei ad verticem BDC. Et quia, quinto æquales sunt anguli DBC, DCB ob æqualia latera DB, DC. Erit vterque semirectus; & propterea linea CB lineæ AE parallela, ob æquales alternos angulos ACB, CAE. Est ergo BC sicut AE perpendicularis ad EC. Atque adeo BC circulum in C tangit. Hæc omnia cum ita habeant propositum sit colligetur.

*Demonstratio.*

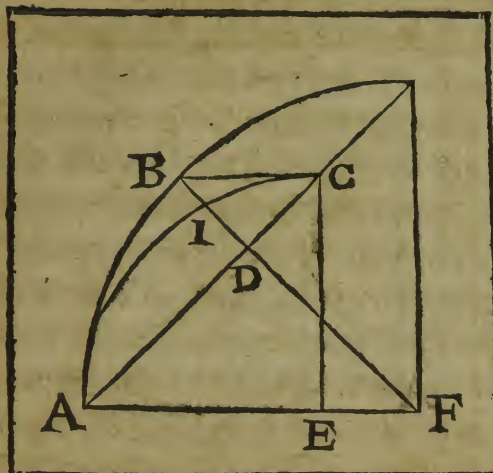
Circulus AB duplus est circuli AC ex suppositione. Ergo illius quarta pars dupla est quartæ partis, istius, sectoris nimirum AEC. Ergo illius octaua pars quæ est sector AFB, sectori AEC, est æqualis.



FIGURÆ CYCLICÆ.

Figura Duodecima.

51



lis. Sed duo triângula  $ADF$ ,  $AEC$  sunt æqualia propter bases  $AC$ ,  $AF$ , & angulos super eisdem æquales. Ergo illis ex sectoribus æqualibus, detractis, remanebit segmentum  $AC$  abscissum lineâ  $AC$ , æquale semisegmento  $ADB$ , arcu  $AB$  & rectis  $DA$ ,  $DB$  comprehenso. Dematur spatium  $ADI$  arcu  $AI$ : & rectis  $DA$ ,  $DI$  contentum, quod est commune, remanebit triângulum mixtum  $DIC$  æquale triângulo mixto  $ABI$ . Addatur commune triângulum mixtum  $BIC$ . Fiet triângulum  $BDC$ , quod ostensum est rectángulum & Isosceles, æquale triângulo mixto  $BAC$  eandem basim  $BC$  cum triângulo  $BDC$  habenti. Quæ quidem basis  $BC$  ostensa est tangere in  $C$  circulum  $AC$ , atque adeo totam extra illum cadere, totumque arcum  $AC$  assumere, vt triângulum mixtum  $ABC$  constituatur. Si igitur duo circuli, &c. Quod erat demonstrandum.

G 2

SCHO







triangulum mixtum  $ABI$  æquale triangulo mixto  $ICD$ .  
 Et addito triangulo mixto  $BIC$ , fiet triangulum rectan-  
 gulum  $BDC$  æquale triangulo mixto  $ABC$ : dixi verò  
 chordam  $AC$  subtendere debere arcum  $AC$  vel  $AL$   
 Quadrante circuli minorem: quia in tali casu linea  $BC$   
 iungens arcum extrema puncta  $B$  &  $C$ , tota extra arcum  
 $AIC$  cadit, nec ullam partem segmenti  $AIC$  abscindit:  
 quod necessarium est ad duo triangula præfata, æqualia con-  
 stituenda. At verò si chorda  $AC$  segmenta circulorum ab-  
 scinderet Quadrante maiora: linea illa  $BC$  subiret segmen-  
 tum  $AIC$ , nec unicum triangulum mixtum constitue-  
 retur æquale triangulo rectangulo  $BDC$ .

PROP. XXIX. PROBL.

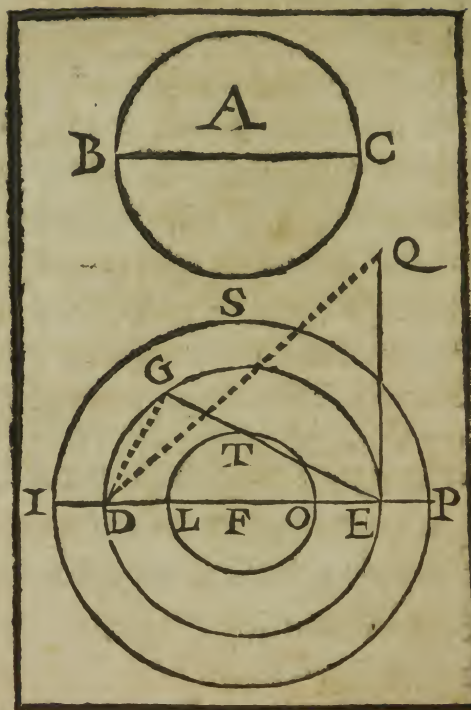
Circa datum circulum  $DGE$  orbem, seu Ar-  
 millam componere æqualem dato circulo  $A$ .  
 Et quando circulus  $A$  minor fuerit circulo  
 $DGE$ , etiam intra ipsum, orbem statuere eidem  
 circulo  $A$  æqualem.

*Constructio.*

Ducatur  $EQ$  ad diametrum  $DE$  circuli dati, per- Fig. 14.  
 pendicularis, & æqualis diametro  $BC$  circuli alterius  
 dati  $A$ , & iungatur recta  $DQ$ . Qua bifariam diuisa,  
 sumatur  $FI$  vel  $FP$  æqualis semissi illius: tum centro  
 $F$  per  $I$  describatur circulus  $ISP$ . Dico orbem inter  
 peripherias  $ISP$ ,  $DGE$  conclusum, æqualem esse  
 circulo  $A$ .

G 3

*Demon*

*Demonstratio.*

In triangulo rectangulo DEQ, basis DQ potest duo latera ED, EQ. Circulus ergo circa DQ, hoc est, IP, ei æqualem; æqualis est duobus circulis circa ED, & circa EQ, hoc est, duobus circulis DGE, & A. Ergo excessus circuli ISP supra circumulum DGE, qui excessus est orbis circumpositus circulo DGE, est æqualis circulo A dato. Quod erat faciendum.

Quod si orbis intra circumulum DGE statuendus proponatur æqualis circulo A, qui minor sit quam DGE: ita absoluetur.

*Constru.*



*Constructio & Demonstratio.*

Applicetur  $EG$  æqualis diametro  $BC$ , circuli  $A$  in circulo  $DGE$ : tum iungatur  $DG$ : quæ statuatur diameter circuli  $LTO$  centro  $F$  descripti. Dico orbem inter peripherias  $DGE$ , &  $LTO$  interceptum, æqualem esse circulo  $A$  nam propter triangulum  $DGE$  rectangulum, circulus circa basim  $DE$  descriptus, æqualis est duobus circulis circa latera  $GD$ ,  $GE$  descriptis. Cum ergo circulus  $LTO$  sit æqualis ei, qui circa  $DG$  describeretur: erit orbis peripheriis  $DGE$ ,  $LTO$  contentus, æqualis circulo circa  $GE$  describendo, hoc est, circulo  $A$  dato: cuius diametro  $BC$ , æqualis est per constructionem recta  $EG$ . Ergo hoc etiam in casu Problema solutum est. Fig. 14

## SCHOLIUM.

*Si loco utriusque illius orbis tam circumscripti quam inscripti, Lunulam efformare placeat circulo dato  $A$  æqualem: facile id absoluetur. Si eadem arte inuentis diametris  $DQ$ ,  $DG$  circuli describantur eccentrici tangentes datum circulum  $DGE$  in puncto  $D$ .*

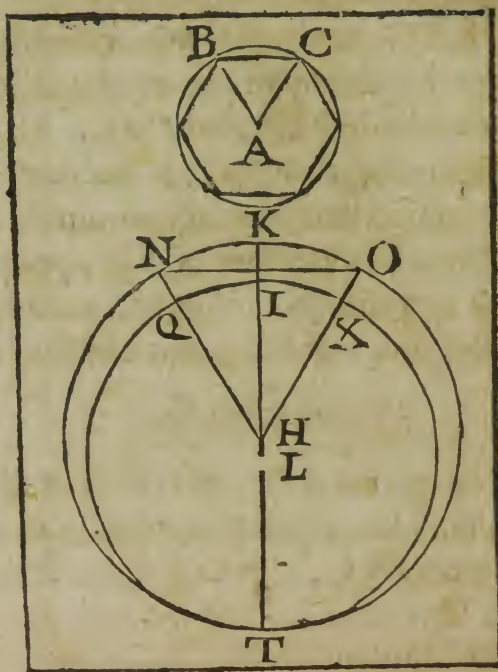
## PROP. XXX. PROBL.

Dato cuius polygono regulari æqualem mixtam figuram, cuius duo latera sint duo arcus sese tangentes, componere.

*Constru*



Figura Decimaquinta.



Constructio.

Fig. 15. Datum sit hexagonum regulare, verbi gratia, quod scilicet circulo inscribatur regulariter: cuius centrum, A, & semidiameter A B reperiatur linea, quæ sextuplum possit semidiametri A B (illam scilicet potentiâ toties contineat, quot lateribus constat datum polygonum) huic autem æqualis sit recta H T, quo radio circulus describatur N O T. Reperiatur deinde linea potentiâ quintupla radij A B; cui sit æqualis recta L T; facto autem centro L circulus per T describatur: qui priorem in ipso puncto T tanget & Meniscum per contra



contactum simul constituent, æqualem necessario circulo  $ABC$ . Cum enim circulus  $NOT$  sit sextuplus circuli  $ABC$ , & circulus minor centro  $L$  descriptus eiusdem sit quintuplus per constructionem: erit Meniscus æqualis ipsi circulo  $ABC$ . Fiat angulus  $NHO$  æqualis angulo  $BAC$ , & ducatur recta  $NO$ . Dico si ex Menisco dematur segmentum  $NKO$ , reliquum eiusdem Menisci arcu  $NTO$ , peripheriâ circuli minoris & rectâ  $NO$  comprehensum, æquale esse dato polygono regulari, cuius centrum est  $A$ .

*Demonstratio.*

Cum sectorum  $BAC$ ,  $NHO$  anguli  $A$  &  $H$  ad centrum facti sint æquales: erunt & ipsi sectores, & abscissa segmenta  $BC$ ,  $NKO$  similia. Sed segmenta similia ita sunt inter se, ut ipsi circuli per 12. prop. Huius. Ergo segmentum  $NKO$  sextuplum est segmenti  $BC$ . Hoc est, æquale est segmentis sex æqualibus, quorum chordæ hexagonum circulo  $ABC$  inscribunt. Si igitur segmentum  $NKO$  ex Menisco. Et segmenta sex segmento  $BC$  æqualia ex circulo demantur; reliqua, nempe mixtam figuram præfata, & hexagonum regulare æqualia esse necesse est. Dato ergo cuiusvis Polygono regulari æqualem mixtam figuram composuimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

*Cum Lunula duabus peripherijs sese in  $T$  tangentibus Fig. 15. intercepta æqualis sit per constructionem circulo  $ABC$ : sit-*

*H que*







PARS I.

Fig. 16. pag. 60.

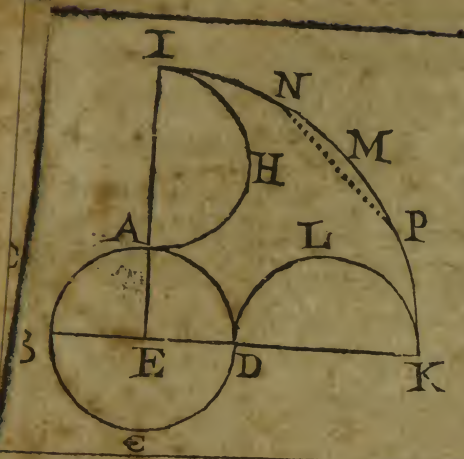


Fig. 17. pag. 62.

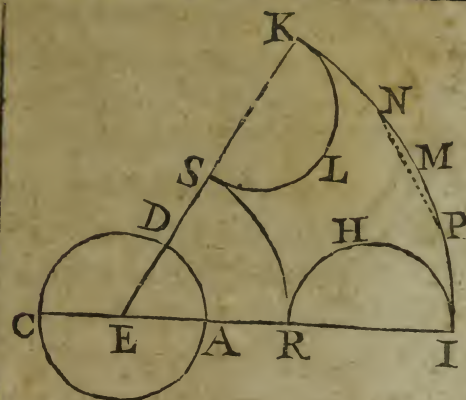
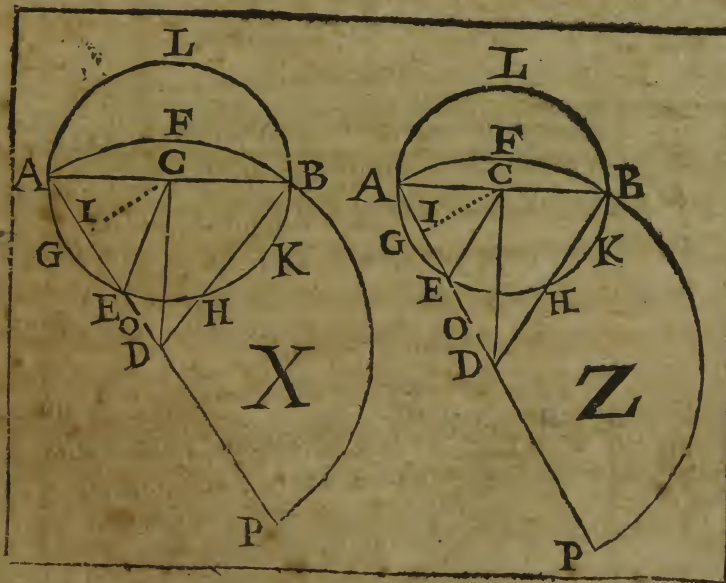


Fig. 22. pag. 76. & 78.





drans. Dico igitur Quadrilaterum contentum Quadrante I M K, semiperipheriis I H A, K L D & Quadrante A D, æquale esse dato circulo A B C D.

*Demonstratio.*

Radius E I circuli I M K triplus est radij E A circuli A B C D ex constructione. Et quia figuræ similes sunt in duplicata ratione suorum laterum homologorum: erit Quadrans maior E I M K noncuplus Quadrantis minoris E A D. Hoc est, æqualis erit bis circulo A B C D & præterea Quadranti E A D. Demantur ergo duo semicirculi I H A, D L K. Et Quadrans E A D ex illo maiore Quadrante E I M K, remanebit Quadrangulum cyclicum præfatum æquale dato circulo A B C D. Quod præstandum erat.

S C H O L I U M.

*Hic demum obseruatione dignum occurrit. Quod si circulo A B C D Enneagonum regulare inscriberetur: & in Quadrante I M K segmentum N M P abscinderetur rectâ N P, quæ latus Enneagoni circulo I M K inscribendi foret: reliquum spatium præfati quadranguli cyclici esset æquale Enneagono intra circulum A B C D inscripto. Nam segmentum N M P nuncuplum foret singulorum segmentorum similium, circuli A B C D. Hoc est, illis omnibus simul foret æquale. Eo ergo dempto ex cyclico Quadrangulo; reliquum spatium necesse est æquale esse Enneagono circuli A B C D.*

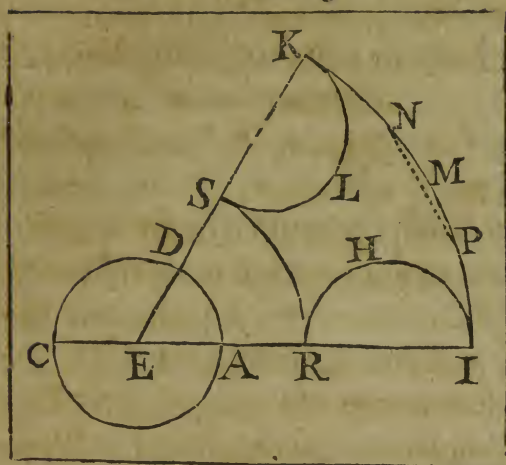
P R O P. XXXII. P R O B L.

Dato circulo Quadrangulum cyclicum æquale rursus exhibere.

*Constructio*



*Figura Decimaſeptima.*



*Constructio.*

Esto circulus datus  $CDA$ , cuius centrum  $E$ : in *Fig. 17.*  
 quo arcus statuatur  $DEA$  Graduum  $60$ , ita ut arcus  
 $DA$  sit totius circuli sextans. Producantur autem ra-  
 dij  $EA, ED$ , ita ut uterque productus, ille usque ad  $I$ ;  
 hic verò usque ad  $K$ , bis contineat diametrum circuli  
 dati  $CDA$ : cui sint propterea æquales tam  $ES, SK$   
 quam  $ER, RI$ . Tum centro  $E$  per  $S$  &  $R$  arcus descri-  
 batur, eique concentricus alter  $KMI$ . Denique cir-  
 ca diametros  $SK, RI$  semicirculi delineentur; qui  
 arcus  $SR, KMI$  tangent: eorúmque peripheriæ  
 unâ cum illis Quadrilaterum Cyclicum component  
 $KLSRHIK$ . Quod assero circulo  $CDA$  esse  
 æquale.

*Demonstratio.*

Radius EK arcus KML quater continet radium  
H 3 ED



ED circuli CDA. Ergo cum circuli rationem habeant duplicatam radiorum; circulus KMI sedecies continebit circulum CDA. Illiusque sextans EKI, huius sextantem EDA etiam sedecies complectetur. At sextans ESR, cuius radius ES duplus est ex constructione radij ED, sextantis EDA; ipsum sextantem EDA quater continebit ob radiorum duplicatam rationem. Reliquum igitur mixtum Quadrilaterum KSRI duodecies complectitur sextantem EDA. At duo semicirculi KLS, IHR, eundem sexies continent. Ergo reliquum Quadrilaterum cyclicum, ipsum etiam sexies continebit: hoc est, toti circulo CDA æquale erit. Exhibuimus igitur Quadrangulum cyclicum æquale dato circulo. Quod erat faciendum.

## S C H O L I U M.

Fig. 17. Possunt ergo duo huiusmodi Quadrangula cyclica diversa, duobus præcedentibus modis inuenta, æqualia fieri inter se: si nimirum duo dati circuli, quibus debent æqualia inveniri Quadrangula, æquales ipsi sint inter se. Imò alia & alia alijs modis definiri possent æqualia tum inter se, tum datis circulis: quæ prosequi pluribus opera pretium non fuerit.

Quod si circulo CDA polygonum regulare sedecim laterum inscribatur; spatium ei æquale designari posset in Quadrangulo cyclico, ducta chorda NP, quæ sit latus polygoni sedecim laterum circulo KMI inscribendi. Est enim segmentum NP æquale segmentis omnibus simul sumptis, quæ à sedecim chordis Polygoni circulo CDA inscripti, abscinduntur.

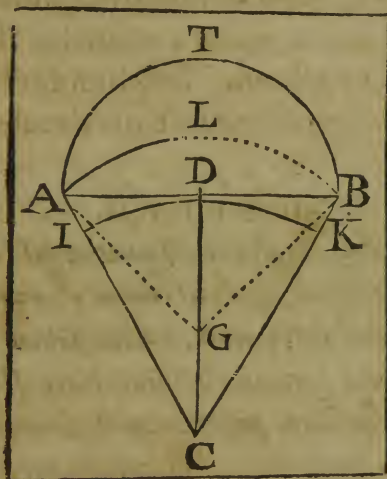
P R O P.



## PROP. XXXIII. THEOR.

Si super latere  $AB$ , trianguli æquilateri  $ABC$  semicirculus  $ATB$  describatur: describatur autem centro  $C$ , radio  $CD$ , (qui est perpendicularis ad latus  $AB$ ) arcus  $IDK$ . Dico figuram semiperipheria  $ATB$ , & arcu  $IDK$ , rectisque lineolis  $AI$ ,  $BK$  contentam æqualem esse triangulo æquilatero.

Figura Decimaottava.



## Demonstratio.

Cum circulus radij  $CD$ , triplus sit circuli, radij  $Fig. 18.$   
 $DA$ . (Est enim  $CD$  potentiâ triplus ad  $AD$  radium)  
 erit etiam semicirculus radij  $CD$  triplus semicirculi  
 $ATB$  radij  $AD$ . Sed semicirculus ille est etiam triplus  
 sectoris  $CIK$  ( siquidem tres sectores sectori  $CIK$   
 æquales



æquales in semicirculo illo continentur) ergo sector  $CIK$  æqualis est semicirculo  $ATB$ . Addantur utriusque duo mixta triangula  $DAI$ ,  $DBK$ : fiet triangulum  $CAB$  æquale præfato spatio mixto  $IATBKI$ . Quare. Si super latere  $AB$ , &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXXIV. THEOR.

Si in schemate propositionis antecedentis Lunula Hippocratica describatur intra semicirculum  $ATB$ , ducto eius arcu interno  $ALB$ : quadrangulum mixtum, arcubus  $ALB$ ,  $IDK$ ; & rectis lineis  $AI$ ,  $BK$  comprehensum, in spatium rectilineum convertere licebit.

*Demonstratio.*

*Fig. 18* Arcus  $ALB$  interior delineatur sumptâ  $DG$  in recta  $DC$  perpendiculari ad diametrum  $AB$ . Semicirculi in eius centro  $D$ ; quæ sit æqualis radio  $DA$  vel  $DB$ ; & ex centro  $G$  descripto arcu  $ALB$  per  $A$  &  $B$ . Ut in superioribus sæpius est inculcatum, ostensumque triangulum  $AGB$  æquale esse Lunulæ Hippocraticæ  $ATBLA$ . Si igitur ex mixto spatio propositionis antecedentis  $ATBKDIA$  dematur Lunula  $ATBLA$ ; & ex triangulo æquilatere  $ACB$ , quod illi spatio mixto est æquale per Prop. antecedentem, dematur triangulum  $AGB$ . Remanebit quadrilaterum mixtum  $ALBKDIA$  æquale duobus triangulis simul  $GAC$ ,  $GBC$ . Quare licet spatium illud mixtum in rectilineum convertere. Quod erat probandum.

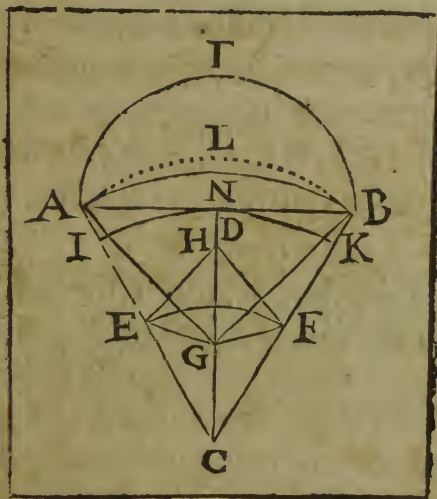
PROP.



PROP. XXXV. THEOR.

In repetita figura Propositionis antecedentis si sumatur linea  $GH$  æqualis lineæ  $GC$ ; & à punctis  $E$  &  $F$ , in quibus  $CA$ ,  $CB$  bifariam diuiduntur, destinentur ad  $H$  lineæ  $EH$ ,  $FH$ : fiet Trapezium  $EHFC$  æquale duobus simul triangulis  $GAC$ ,  $GCB$ .

*Figura Decimanona.*



*Demonstratio.*

Iungantur  $GE$ ,  $GF$ . Duo triangula  $AGE$ ,  $EGC$  *Fig. 19.*  
propter bases æquales  $EA$ ,  $EC$ ; æqualia sunt: duo  
item triangula  $GEH$ ,  $GFH$  æqualia sunt, cum eo-  
rum bases  $GH$ ,  $GH$  sint ex suppositione æquales.  
Ergo æqualia sunt inter se duo triangula  $EAG$ ,  $EHG$ .  
Quibus si addatur commune triangulum  $EGC$ : fient  
duo

duo triangula  $AGC, EHC$  æqualia. Pari modo ostenduntur triangula duo  $BGC, FHC$  æqualia. Totum ergo Trapezium  $EHFC$  æquale est duobus triangulis simul  $GAC, GBC$ . Quod erat probandum.

## COROLLARIUM.

*Cum ergo mixtum Quadrilaterum arcibus  $ALB, IDK$  & rectis  $AI, BK$  comprehensum, sit æquale ostensum duobus triangulis  $GAC, GBC$ . Æquale etiam erit Trapezio  $EHFC$  illis triangulis æquali.*

## PROP. XXXVI. THEOR.

In eadem figura si ex puncto  $C$  tanquam centro duo arcus describantur, alter quidem per  $A$  &  $B$ , nempe  $ANB$ ; alter verò per  $E$  &  $F$ , dico Lunulam arcu  $ALB$  ex centro  $G$  descripto, & arcu  $ANB$  contentam, æqualem esse triangulo mixto  $HEF$ , quod scilicet rectis  $HE, HF$  & arcu  $EF$  continetur.

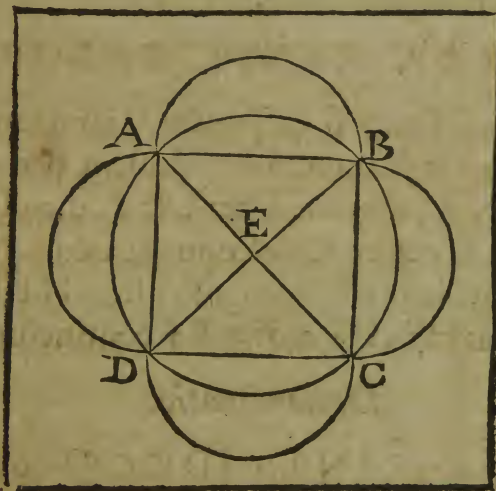
*Demonstratio.*

*Fig. 19.* Sēctores tres  $CANB, CIDK, CEF$  eodem centro  $C$  descripti, similes sunt, atque adeò per Prop. 12. huius eandem inter se rationem observant, quam circuli, ad quos pertinent. Cum igitur radius  $CA$  duplus sit radij  $CE$ : erit sector  $CAB$  sectoris  $CEF$  quadruplus ob rationem radiorum  $CA, CE$  duplicatam. Sector verò  $CIDK$ , eiusdem sectoris  $CEF$  triplus est. Nam radius  $CD$  triplum potest lineæ  $DA$ , cui æqualis est radius  $CE$ . Est ergo sector  $CEF$  excessus sectoris



sectoris  $CAB$  supra sectorem  $CIK$  : atque adeo æqualis mixto Quadrilatero  $ANBKDIA$ . Quo duo illi sectores differunt. Cum ergo Trapezium  $EHFC$  æquale ostensum sit mixto Quadrilatero  $ALBKDIA$ , si ex eo dematur Quadrilaterum  $ANBKDIA$  ; & ex Trapezio sector  $CEF$ . Remanebunt Lunula  $ALBN$  & triangulum mixtum  $HEF$  æqualia. Quare si ex puncto  $C$  tanquam, &c. Quod erat demonstrandum.

Figura Vigesima.



MONITVM.

Ut toti huic exercitationi præbuit occasionem illa Hippo- Fig. 20  
cratis Lunula : ita eadem alias & alias rationes curvilinea  
in rectilinea conuertendi quam plurimas aperuit : quas om-  
nes prosequi longioris foret operæ, nec operæ foret fortasse  
pretium. Vna tamen, quæ nec inelegans nec iniucunda futu-  
ra est, omitti non debet : quæ circa polygona regularia, hoc  
est,

I 2

est,



est, equalibus & angulis & lateribus constantia & circulo vel inscribi vel circumscribi possunt, versatur. Sicut enim, si circa Quadrati  $ABCD$  singula latera semicirculi describantur; & ex Quadrati centro  $E$  describatur circulus per eius angulos transiens efformantur quatuor Lunule, quæ simul Quadrato ipsi sunt æquales, ut constat ex Lunule Hippocratis Constructione. Sicut, inquam, circa Quadratum polygonorum regularium nobilissimam figuram, hæc ita habent. Ita fortasse aliquid simile occurreret: si circa latera aliorum polygonorum semicirculi delineentur, & ex eorum polygonorum centro circulus fiat, qui æqualis sit omnibus semicirculis polygono circumpositis, siue per angulos polygoni transeat, siue non: quod ex constructione constabit quam in singulis trademus. Aggrediamur ergo regularium figurarum primam, triangulum scilicet æquilaterum: quod huiusmodi constructionem respuere demonstro sequenti Propositione eiusque Corollario.

## P R O P. XXXVII. T H E O R.

Si circa latera æquilateri trianguli  $ABC$  semicirculi tres describantur: describatur autem circulus per tres eius angulos transiens ex eiusdem centro  $E$ . Erit hic circulus tribus semicirculis minor.

*Demonstratio.*

Fig. 21. Iungantur centra  $E$  &  $F$  circulorum  $ABC$ , &  $AGB$  lineâ rectâ  $EF$ . Hæc cum bifariam in  $F$  diuidat rectam  $AB$  subtendentem arcum  $AIB$  per cuius centrum  $E$  transit: erit ad ipsam  $AB$  perpendicularis. Duo







guli lateribus, insistentibus. Tres enim illi semicirculi ad duos semicirculos, hoc est, ad circulum vnum integrum rationem habent sesquialteram, vt patet; ad quem, eandem rationem sesquialteram habet etiam circulus ille, cuius radius sesquialterum potest radij  $FA$ . Sed radij eiusdem  $FA$  radius  $EA$  circuli triangulo circumscripti, sesquitertium tantum potest, vt paulo ante stabilitum est. Ergo radius  $EA$  minor est quam radius ille, qui est potentiâ sesquialter radij  $FA$ ; & qui circulum tribus illis semicirculis æqualem describit. Duarum siquidem linearum illa maior est, quæ ad eandem lineam  $FA$  maiorem rationem habet. Quis verò ambigat rationem sesquialteram sesquitertia maiorem esse. Quare rursus si circa latera, &c. Quod erat confirmandum.

## C O R O L L A R I U M.

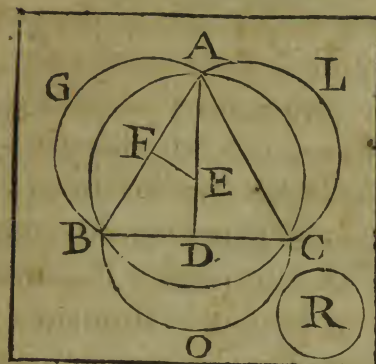
*Hinc sequitur quod supra præmonui; nimirum non posse circulum describi vel circa triangulum æquilaterum, qualis est  $ABC$ , vel alium intra hunc ipsum circulum, qui sit æqualis tribus semicirculis, qui super tribus lateribus trianguli eriguntur. Ostensus siquidem est radius, quo circulus illis æqualis describeretur, maior radio  $EA$ . Ergo circulus ille ambiret & ipsum circulum  $ABC$ , & triangulum circa quod descriptus est: ipsorumque semicirculorum arcus intersectaret.*

## S C H O L I U M.

*Fig. 21. Cum ostenderim radium circuli æqualis tribus semicirculis, qui lateribus trianguli  $ABC$  incumbunt, esse potentiâ sesquialte*



Figura Vigesima prima.



sesquialterum radij  $FA$ : is facile inuenietur: est enim, ut Elementa docent, media linea proportionalis inter lineam  $FA$ , & lineam compositum ex  $FA$  & eius semisse: quam etiam hoc modo definiemus. Reperiatur linea ad quam radius  $FA$  sit potentiâ duplex: tum alia linea inquiretur, quæ ad hanc proximè inuentam sit potentiâ, tripla hæc enim erit potentiâ, radij  $FA$  sesquialtera, ut patet attendenti. Porro cum ostensum sit inter demonstrandum hanc propositionem, tres semicirculos circa triangulum, ad circulum  $ABC$  rationem habere, quam 9. habet ad 8. si circulus inueniatur, cuius circulus  $ABC$  sit octuplus, siue qui sit pars octaua (sit inuentus per Elementa, huiusmodi circulus  $R$ ) erit circulus  $ABC$  cum hoc circulo  $R$ , æqualis tribus prefatis semicirculis. Quare si auferantur tria segmenta communia utrique illi æquali quantitati: remanebit triangulum æquilaterum  $ABC$  simul cum circulo  $R$  æquale tribus simul Lunulis: quarum cornua tribus angulis trianguli insistant. Atque hæc satis de prima regulari figura. De secunda verò, quæ Quadratum est, iam in monito præcedenti & alibi sæpius actum est.

Aggredia



*Aggrediamur Pentagonum & reliqua deinceps Polygona regularia: ad quæ omnia sequens Theorema maximè necessarium est.*

P R O P. XXXVIII. T H E O R.

Si circulo Pentagonum, aliâque Pentagonum numero laterum superantia Polygona regularia inscribantur: semicirculi super omnibus Polygoni lateribus descripti, omnes simul sumpti, minores sunt circulo illo, cui inscribuntur Polygona: & quidem eo minores, quo pluribus lateribus constabit Polygonum.

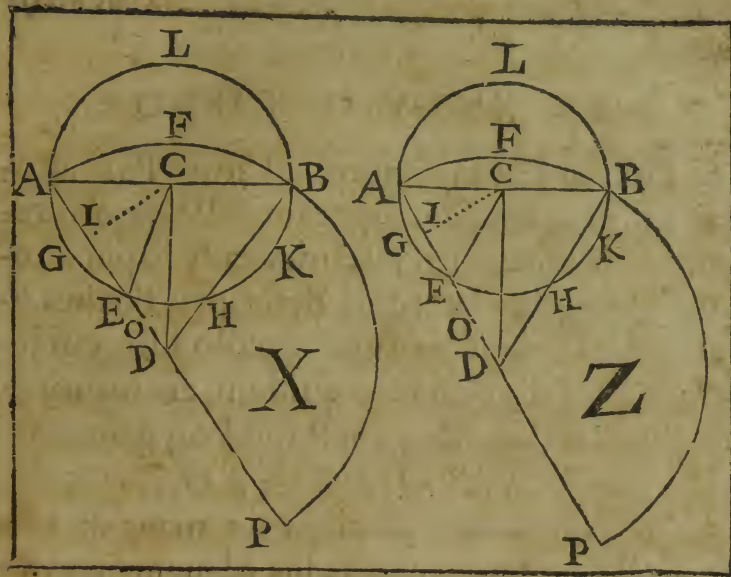
E X P O S I T I O.

Quia Polygonum quodlibet tot triangulis constat, ductis à centro circuli radiis ad omnes eius angulos; quot lateribus ipsum constat; totidemque fiunt sectores circuli Polygonum inscribentis, æquales inter se. Satis fuerit, si vnus aliquis semicirculus super vno latere Polygoni descriptus, minor ostendatur sectore illo; quem radij ad latus illud, siue semicirculi diametrum, ducti comprehendunt. Hinc enim euident est omnes semicirculos omnibus sectoribus, hoc est, toto circulo inscribente minores esse.

*Fig. 22* In circulo igitur  $A F B P$ , centro  $D$  descripto sit  $A B$  latus Pentagoni & aliûs cuiuscumque Polygoni, Pentagonum numero laterum superantis, verbi gratia hexagoni: super quo semicirculus describatur  $A L B$ : & ducantur radij  $D A, D B$ . Dico igitur semicirculum  $A L B$  minorem esse sectore  $D A F B$ .

*Preparatio.*





*Preparatio.*

Describatur totus circulus ALB ducatur recta DC futura perpendicularis ad AB, cum ipsam bisecet; ducatur item CI ad radium DA perpendicularis. Ducatur denique CE ad punctum E: in quo DA secatur à circulo ALB: erit punctum illud E inter A & D. In Pentagono cæterisque Polygonis. Nam in omnibus angulus ADB est necessario minor recto: insistit enim arcui AFB, qui minor est circuli Quadrante ex suppositione, quod sit vel quinta pars, vel alia minor quinta totius circuli. Ergo anguli ADB semissis ADC, minor est angulo semirecto. Ergo in triangulo rectangulo ACD, angulus CAD maior est semirecto; maior ergo quam angulus CDA: maius proinde est

K                      latus



latus  $CD$ , quàm  $CA$ . Quare circulum radio  $CA$  descriptum necesse est secare rectam  $CD$ , inter  $C$  &  $D$ : ergo & rectam  $DA$  inter  $A$  &  $D$  secturus est, putâ in  $E$ ; ac perinde rectam  $DB$  in  $H$ .

*Demonstratio.*

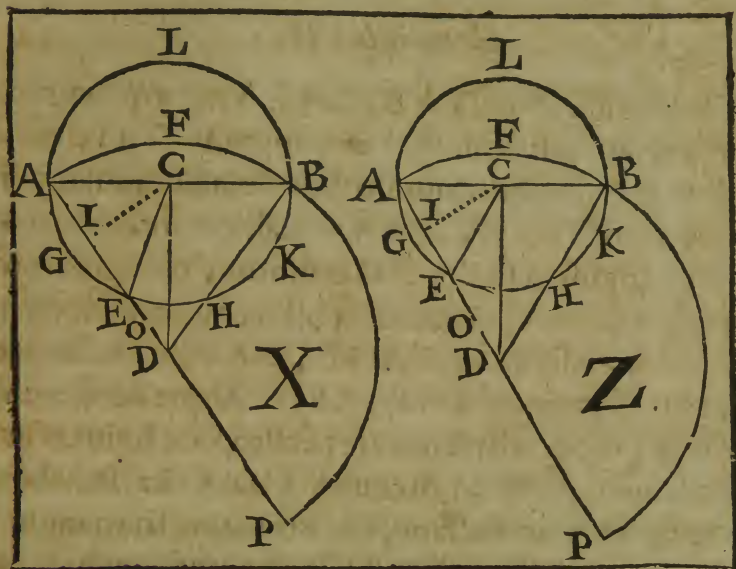
Triangula duo  $DAB$ ,  $CAE$  sunt æquiangula. Cum enim sint Isoscelia: erit angulus  $CAE$  trianguli  $CAE$ , æqualis angulo  $CEA$  eiusdem trianguli: atque adeo  $CEA$ , &  $DBA$  æquales erunt. Ergo & reliqui anguli  $ACE$ ,  $ADB$  horum triangulorum æquales erunt. Qui cum sint ad centra circulorum: *Fig. 22* similes erunt sectores  $AGE$ ,  $AFB$ : similiaque proinde segmenta  $AGE$ ,  $AFB$ . Atque adeo erunt inter se, ut circuli ipsi inter se per Prop. 12. huius. Circulus autem  $AFB$  ad circulum  $ALBK$  ita se habet, ut recta  $DA$  ad rectam  $AI$ . Probatur. In triangulo rectangulo  $ACD$  ducta est  $CI$  ab angulo recto  $C$  ad basim  $DA$  perpendicularis. Ergo ut se habet  $DA$  ad  $AC$ , ita est  $AC$  ad  $AI$ . Ergo ita est circulus radij  $DA$  ad circulum radij  $CA$  ut  $DA$  ad  $AI$ . Quod cum ita sit. Cum linea  $DA$  contineat  $AI$  bis (est enim  $AE$  eius dupla) & præterea particulam  $ED$ : etiam segmentum  $AFB$  continebit segmentum  $AGE$  bis, hoc est duo segmenta  $AGE$ ,  $BKH$ , & præterea aliquid amplius. Addatur tam segmento  $AFB$  quam segmentis  $AGE$ ,  $BKH$ , mixtum spatium  $ABHEA$ : erit quadrilaterum mixtum arcubus  $AFB$ ,  $EH$ ; & rectis  $AE$ ,  $BH$  contentum maius semicirculo  $AGEHKB$ . Quid si ad illud quadrilaterum mixtum addatur adhuc  
triangu



FIGURÆ CYCLICÆ. 75

triangulum mixtum EDH, vt fiat sector DAFB, quantò maior futurus est; quàm semicirculus AEHB siue ALB. Atque hæc est prior Propositionis pars.

*Figura Vigesima secunda.*



Posterior verò quod sector futurus sit eo maior semicirculo; quo plura fuerint Polygoni latera; euidentis fiet assumptis eisdem figuris ad Pentagonum & hexagonum pertinentibus. Quæ quia ambæ eisdem Characteribus insigniuntur; vt faciliè deinceps distinguantur: priorem ad Pentagonum spectatam notâ X, posteriorem, quæ ad hexagonum pertinet, notâ Z, discernemus. In vtraq; porrò figurâ producaturs semidiameter AD, & cõpleatur semicirculus AFBP. Nunc ad rem. Ostensum est proximè in vtroque schemate X & Z, ita esse semicirculum ABP ad semicirculum AEHB, vt est

K 2

recta



Fig. 22

recta  $DA$  ad rectam  $AI$  (licet enim de circulis integris facta tantum mentio fuerit: par tamen est semicircularum ratio, qui sunt semisses terminorum) ut item eadem  $DA$  ad  $AI$ , ita esse sectorem  $DAB$  ad sectorem  $CAE$ . Ergo ut semicirculus  $ABP$  ad semicirculum  $AH B$ : ita est sector  $DAB$  ad sectorem  $CAE$ . Et permutando, ut semicirculus  $ABP$  ad sectorem  $DAB$ ; ita est semicirculus  $AH B$  ad sectorem  $CAE$ . Haecenus utrique figurae communia tradita sunt: deinceps utrique propria exponentur.

In figura  $X$  Pentagoni tam semicirculus  $ABP$  sectoris  $DAB$ : quam semicirculus  $AH B$  sectoris  $CAE$ , est duplus sesquialter, ut patet. Sumatur ergo in recta  $AD$ , pars eius  $AO$  dupla sesquialtera ad rectam  $AI$ . Tunc quia ita est sector  $DAB$  ad sectorem  $CAE$ ; ut recta  $DA$  ad rectam  $AI$ : & ut sector  $CAE$  ad semicirculum  $AH B$ : ita est recta  $AI$  ad rectam  $AO$ . Ex æquo ita erit  $DA$  ad  $AO$ , ut sector  $DAB$  ad semicirculum  $AH B$ . His stabilitis, inquirendum est an sector  $DAB$ , in figura  $Z$  hexagoni, ad semicirculum suum  $AH B$  maiorem habeat, aut minorem rationem, quam recta  $DA$  ad rectam  $AO$ .

Quia igitur semicirculus  $ABP$  sectorem  $DAB$ : & semicirculus  $AH B$  sectorem  $CAE$ , ter continet; sumatur recta  $AI$  à puncto  $A$  usque ad  $O$ , ter. Tunc, quia est sector  $DAB$  ad sectorem  $CAE$ ; ut recta  $DA$  ad rectam  $AI$ : & ut sector  $CAE$  ad semicirculum  $AH B$ , ita ex constructione, recta  $AI$  ad  $AO$ . Erit ex æquo, sector  $DAB$ , ad semicirculum  $AH B$ .



AEHB: vt recta DA ad AO. His in vtraque figura declaratis: cum in vtraque supponatur eadem linea DA; inquirendum est an binæ lineæ AO sint æquales; an certè inæquales. Propositio nostra inæquales asserit dum vult in figura Z hexagoni maiorem esse rationem sectoris DAB ad semicirculum AEHB, quam sectoris DAB in figura X Pentagoni, ad semicirculum AEHB. Necesse est enim, si vera est, lineam AO in Pentagono maiorem esse, quàm lineam AO in hexagono. Sic enim recta DA vtrobique æqualis minorem habebit rationem ad AO maiorem in Pentagono, quam ad AO minorem in hexagono; atque adeo & sector DAB ad semicirculum AEHB in Pentagono, minorem habebit rationem quam in hexagono: Quas rationes metiuntur binæ & binæ rectæ DA, AO.

Quantitas ergo duarum rectarum AO inuestiganda est, vt æqualitas vel inæqualitas earum cluceat. Quod non alia breuiore, nec vniuersaliore ratione absoluetur: quam ope numerorum: licet enim in certis quibusdā casibus ratio suppetat Geometrica, quā inæqualitas hæc innotescat; vix tamē occurrat, quæ Polygoni omnibus cōuenire possit. Sic ergo habet calculus.

In triangulo rectangulo DCA figuræ X Pentagoni. Angulus CDA notus est, nimirum, G 36. Semissis scilicet anguli ADB in centro Pentagoni, qui est, G 72. Posito ergo sinu toto DA 100000. Erit CA 58779. Hæc media est proportionalis inter DA & AI. Si igitur Quadratum rectæ CA 3454970841

K 3 diui



diuidatur per  $DA$  100000 fiet  $AI$  34549. Sumatur hæc bis cum eiusdem semisse, fiet  $AO$  86373 ad  $AI$  dupla sesquialtera.

*Fig. 22* At verò in triangulo rectangulo  $DCA$  figuræ  $Z$  hexagoni, angulus  $CD A$  est,  $G. 30$ . Eius sinus  $CA$  (posito sinu toto  $DA$ ) est 50000 eius Quadratum est 2500000000. Quod per  $DA$  diuisum, producit  $AI$  25000. Cuius tripla  $AO$  erit 75000.

Iam hæc ambæ  $AO$  inter se conferantur: hæc posterior longe minor erit; quàm prior 86373 ad Pentagonum spectans. Quare maior est proportio rectæ  $DA$  ad  $AO$  in hexagono, quàm in Pentagono. Ergo etiam maior erit ratio sectoris  $DAB$  ad semicirculum  $AEB$  in hexagono, quàm in Pentagono. Ergo semicirculus super latere Polygoni alicuius descriptus eò minor est sectore sibi respondente: quò plura fuerint Polygoni latera. Quia verò sectores circulum cui inscribitur Polygonum, constituunt: eò maior futurus est ille circulus omnibus semicirculis super lateribus Polygoni descriptis, quò plura fuerint latera eiusdem. Vera ergo est vtrique pars Propositionis.

## C O R O L L A R I V M.

*Fig. 22* Hinc colligas sectorem omnem; cuius angulus sit recto minor, maiorem semper esse semicirculo: cuius diameter sit recta subtendens arcum sectoris. Demonstratum siquidem est in schematibus duobus superioribus  $X$  &  $Z$ , ex eo quod angulus  $ADC$  sit acutus (acutum esse necesse est posito angulo  $ADB$ , eius duplici, acuto) segmentum  $AFB$ , ita esse  
ad



ad segmentum AGE; ut recta DA ad rectam AI. Ideoque, consequentibus duplicatis, ita erit segmentum AFB, ad duo segmenta AGE, BKH; ut recta DA ad rectam AE. Cum ergo DA, in hoc casu semper maior futura sit, quàm AE (semper enim angulus DAC maior erit angulo CDA, eò quod hic minor sit semirecto; cum eius dupl. ADB minor recto supponatur: atque adeo DAC maior semirecto, ut ambo simul rectum adæquent. Ergo recta CD semper maior erit quàm CA; & circulus centro C descriptus rectas DC, DA supra D secabit) etiam segmentum AFB maius futurum est quàm duo segmenta simul AGE, BKH. Addatur commune Quadrilaterum mixtum AEHB: fiet Quadrilaterum mixtum AEHBFA maius semicirculo AEHB. Quod si ad Quadrilaterum addatur adhuc triangulum mixtum DEH. Ut fiat sector DAFB: multò maior futurus est hic sector, quàm semicirculus præfatus AEHB, & quidem eò maior, quò acutior fuerit sectoris angulus ADB.

PROP. XXXIX. PROBL.

Datis, duobus sectoribus DAB, CEF dissimilibus; quorum anguli D & C rationem habeant notam, eam nimirum quam habent lineæ G, H; eorum alterutrum ad æqualem sectorem, alteri similem reuocare.

Constructio.

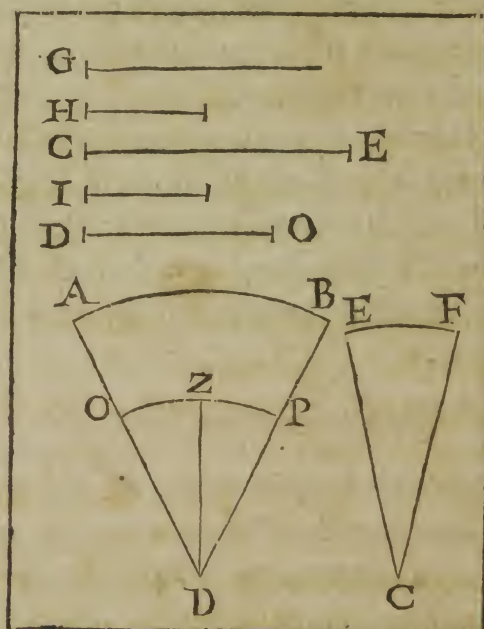
Sit sector CEF ad sectorem æqualem reuocandus, qui similis sit sectori alteri DAB: id est, cuius angulus

Fig. 23



angulus æqualis sit angulo  $A D B$ . Fiat ut  $G$  ad  $H$ ; ita  $C E$  ad quartam  $I$ . Deinde inter duas  $C E$  &  $I$ , media proportionalis reperiatur: cui æqualis sumatur  $D O$ : eoque radio, centro  $D$  arcus  $O P$  describatur. Dico sectorem  $D O P$ , eum esse qui quæritur; similem scilicet esse sectori  $D A B$ , æqualem verò sectori  $C E F$ .

*Figura Vigesima tertia.*



*Demonstratio.*

Quod sector  $D O P$  similis sit sectori  $D A B$  notum est, cum utriusque idem sit angulus  $D$ . Quod autem sit æqualis sectori  $C E F$ , probatur. Fiat angulus  $O D Z$  æqualis angulo  $E C F$ , & ducatur recta  $D Z$ . Quia igitur est ut angulus  $O D P$  ad angulum  $E C F$ , siue  $O D Z$ : ita ex suppositione est recta  $G$  ad  $H$ , aut ex constru



construptione CE ad I. Vt autem angulus ODP ad  
angulum ODZ; ita est sector ODP ad sectorem  
ODZ. Erit ergo vt recta CE ad rectam I; ita sector  
ODP ad sectorem ODZ. Quia verò tres rectæ CE,  
DO, I sunt continuè proportionales ex constructio-  
ne, est enim DO posita media proportionalis inter  
CE & I; est autem sector DOZ similis sectori CEF,  
quorum ille est positus super primam CE trium pro-  
portionalium; hic verò super secundam DO: erit se-  
ctor CEF ad sectorem DOZ, vt prima CE ad ter-  
tiam I. Sed sector DOP ad eundem sectorem DOZ,  
ita ostensus est se habere vt CE ad I. Ergo duo se-  
ctores CEF, DOP sunt æquales inter se. Sectorem  
igitur datum CEF ad alium æqualem DOP, & simi-  
lem sectori dato DAB reuocauimus. Quod erat fa-  
ciendum.

COROLLARIUM I.

Hoc ita soluto Problemate aperta est ratio conuertendi Fig. 24  
semicirculos super lateribus Polygonorum regularium quo-  
rumcumque, Quadratum, laterum numero superantium de-  
scriptos in circulum vnicum; qui minor futurus est necessa-  
riò, vt Prop. 38. ostensum est, circulo: cui Polygono cir-  
cumscribitur. Vnde, vt mox patebit, habebitur spatium  
quoddam mixtum Polygono æquale.

Sit enim, Verbi gratia, Pentagonum: super cuius late-  
ribus semicirculi describantur: quorum vnus sit ALB &  
ductis radijs DA, DB à centro D Pentagoni, fiat sector  
DAFB; qui maior est per Prop. 38. Semicirculo ALB.

L. Habe







potest semicirculus  $ALB$  ad alium sectorem æqualem & similem sectori  $DAB$ . Sumptis scilicet duabus lineis  $G, H$ ; quarum illa, huius sit subdupla sesquialtera: deinde his tribus  $G, H$ , & radio  $AC$  inuentâ quartâ proportionali  $I$ . At tandem inter  $AC$  &  $I$ , mediâ proportionali inuentâ. Cui sit æqualis  $DO$ . Describatur arcus  $OP$ . Erit sector  $DOP$  æqualis semicirculo  $ALB$ : atque adedò totus circulus  $OP$  circumductus æqualis fiet omnibus semicirculis simul, omnibus lateribus Pentagoni, adiacentibus: cum omnium semicirculorum & sectorum eadem sit habiudo inter se: quæ est semicirculi  $ALB$ . & sectoris  $DAB$ . Partes siquidem cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione.

His ita constitutis sequitur triangulum  $DAB$  esse æqua- Fig. 24  
le spatio mixto: quod semiperipheria  $ALB$ , & arcu  $OVTP$ , & rectis lineis  $AO, BP$  continetur. Nam cum semicirculus  $ALB$ , & sector  $DOP$  sint æquales: dematur segmentum commune rectâ  $VT$  abscissum; & addantur duo triangula mixta  $AOV, BTP$ . Fiet triangulum  $DAB$ , prefato spatio mixto siue Lunula utroque cornu minutæ  $ALBPTVOA$  æquale: atque adeo Pentagonum regulare (eadem enim est cæterorum triangulorum ratio) æquale est Meniscis quinque utroque cornu minutis. Quæ autem circa Pentagonum hic tradita sunt: eadem omnia eodemque modo Polygonis omnibus regularibus æque conueniunt, ut fusior eorum expositio iniri frustra videatur: Aduertat tantum quanta seges rectilineorum curuilineis æqualium hinc enascatur.

## COROLLARIUM. II.

Nec verò tantum exhiberi potest Lunula cornibus minuta Fig. 24

L 2 æqualis



*æqualis triangulo Iſoſceli ; cuius angulus ad verticem , angulus ſit , regularis alicuius Polygoni circulo inſcripti : verum etiam cuiuſcunque quantitatis fuerit ille verticis angulus , modò recto minor ſit ; notamque rationem habeat ad duos rectos angulos. Si enim recto minor eſt verticis angulus ; ſemicirculus ſuper baſe tanquam diametro deſcriptus , cuiuſmodi eſt in figura ſemicirculus  $ALB$  , ſemper minor erit ſectore  $DAFB$  , vt in hac Prop. demonſtratum eſt , atque adeò ſector  $DOP$  æqualis ſemicirculo  $ALB$  ex eo domi poterit , formarique ſpatium Lunare utroque cornu deſiciens , æquale triangulo Iſoſceli  $DAB$  , non ſecus ac præſtitum eſt corollario præcedente.*

## PROP. XL. THEOR.

*Si fuerint duæ rectæ lineæ  $AB$  ,  $CD$  : ſecuturque ipſarum altera  $AB$  in quocunque ſegmenta  $AE$  ,  $EB$ . Ellipſis  $ACBD$  , cuius axes ſunt duæ illæ lineæ : æqualis eſt Ellipſibus , quarum axes ſunt ſingula ſegmenta lineæ  $AB$  , & linea infecta  $CD$  cuiuſmodi ſunt Ellipſes  $ACED$  ,  $ECBD$ .*

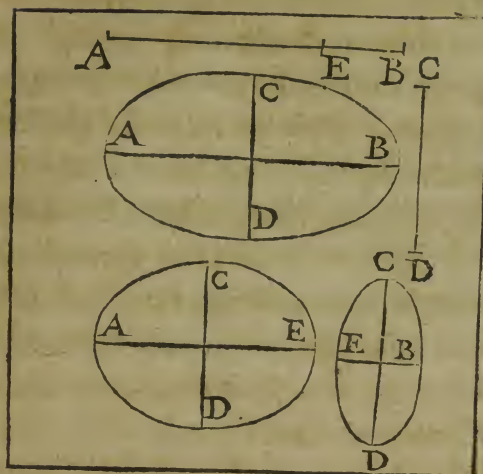
*Demonſtratio.*

Fig. 25.

*Quamuis grauiffimum curuilinea inter & rectilinea diſſidium intercedat : tantum tamen non eſt : vt omnem inter ea neceſſitudinem abrumpat ; vt ex dictis hætenus videre eſt , clariuſque ex iis , quæ deinceps propoſiturus ſum , obſervare licebit. En huc allatam Euclidis Propositionem primam libri ſecundi:*

*Quid*





Quid præ ipsâ rectilineum magis? Eandem tamen, ceterâsque omnes eiusdem libri; omnes, quas Pappus, quas Apollonius, aliique Authores non pauci circa rectangula ex varia lineæ rectæ sectione, orta demonstrarunt; ad circulos Ellipsesue non minus pertinere fiet manifestum ex sequentibus aliquot, reliquarum instar, Propositionibus, quas subiungam. Nunc ad rem. Certum est per Prop. 6. Archimedis lib. de Conoid. & Sphæroid. circulum, cuius diameter sit media proportionalis inter axem maiorem  $AB$ , & minorem  $CD$  Ellipseos  $ACBD$ ; eidem Ellipsi æqualem esse: idemque in reliquis duabus Ellipsis  $ACED$ ,  $ECBD$  contingere. Ita ut sufficiat duos hosce postremos circulos simul, demonstrare æquales primo circulo æquali, Ellipsi primæ  $ACBD$ . Quod ita conficitur. Quadratum mediæ proportionalis inter rectas

L 3

AB,



$AB, CD$  æquale est rectangulo sub  $AB$  &  $CD$ . Quadratum autem mediæ inter segmentum  $AE$  &  $CD$  æquale est rectangulo sub  $AE$  &  $CD$ : eodẽque iure Quadratum mediæ inter:  $EB$  &  $CD$  æquale erit rectangulo sub eisdem lineis  $EB$  &  $CD$ . Sed duo rectangula sub  $AE, CD$ ; sub  $EB, CD$  æqualia sunt per Prop. 1. lib. 2. Euclidis rectangulo sub  $AB, & CD$ . Ergo & duo Quadrata duobus posterioribus rectangulis æqualia, æqualia erunt Quadrato æquali, rectangulo primo sub  $AB, CD$ . Sed per 2. lib. 12. circuli ita se habent ut à diametris Quadrata. Ergo circulus primus æqualis est duobus circulis reliquis. Atque adeò Ellipsis prima, cuius axes sunt  $AB, CD$ ; reliquis duabus quarum axes sunt  $AE, CD$ ; &  $EB, CD$ , æqualis erit. Quare. Si fuerint duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

## C O R O L L A R I U M.

Fig. 25. Ex huius Propositionis demonstratione sequitur: circulum, cuius diameter est mediæ proportionalis inter totam  $AB$ , & alteram  $CD$ ; æqualem esse circulis; quorum diametri sunt mediæ proportionales inter insectam  $CD$ , & segmenta singula  $AE, EB$  sectæ lineæ  $AB$ . Id enim prius probari debuit: ut ostenderetur Ellipsim  $ACBD$  æqualem esse duabus simul Ellipsibus  $ACED, ECBD$ .

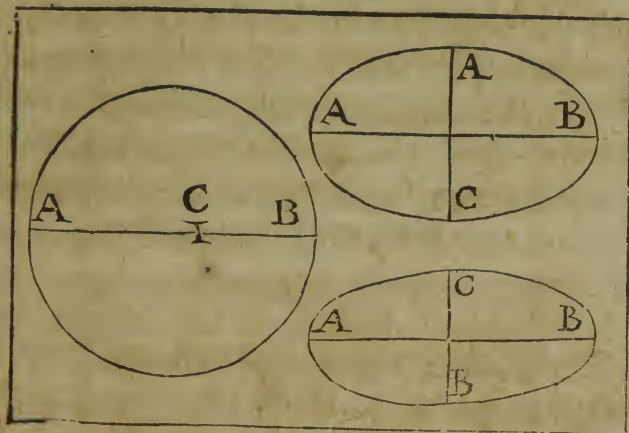
## P R O P. XLI. T H E O R.

Si recta linea  $AB$  secta sit utcumque in  $C$ . Circulus, cuius diameter est tota  $AB$  æqualis est



est Ellipsis; quarum maior axis est tota  $AB$ .  
minor. verò, singula totius  $AB$  segmenta,  
 $AC$ ,  $CB$ .

Figura Vigesima sexta.

*Demonstratio.*

Propositio hæc, ut patet, secundam imitatur. Libri *Fig. 26.*  
secundi Propositionem Euclidis. Nec methodo de-  
monstratur, ab ea dissimili: quæ ad Antecedentem  
Propositionem demonstrandam adhibita fuit. Cum  
enim constet ex citata Propositione Euclidis, Quadra-  
tum totius lineæ  $AB$  æquale esse rectangulis omni-  
bus, quæ sub tota  $AB$ , & singulis segmentis  $AC$ ,  
 $CB$  continentur. Rectangula autem sub tota  $AB$  &  
singulis eius segmentis, æqualia sint Quadratis linea-  
rum: quæ inter totam  $AB$  & singula eius segmenta  
sunt mediæ proportionales: & per 2. lib. 12. circuli ita  
inter se sint, ut à diametro Quadrata: erit circulus à  
diametro  $AB$  æqualis circulis omnibus à diametris,  
quæ



Fig. 26 quæ sunt mediæ illæ proportionales inter  $AB$  & eius singula segmenta. Sed circuli super huiusmodi diametris mediis proportionalibus, æquales sunt Ellipsibus: quarum axes sunt tota  $AB$  & singula eius segmenta per  $c$ . Conoid. & Sphæroid. Archim. Ergo circulus à diametro  $AB$ , æqualis etiam erit Ellipsibus illis omnibus quarum maior axis est  $AB$ ; minor verò singula totius  $AB$  segmenta. Quare. Si recta linea  $AB$  secta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

## P R O P. XLII. T H E O R.

Si recta linea  $AB$  secta sit utcumque in  $C$ . Circulus, qui à tota describitur; æqualis est & illis qui à segmentis ut diametris describuntur, circulis, & Ellipsibus, cuius axes sunt ipsa segmenta  $AC$ ,  $CB$ .

Figura Vigesima septima.

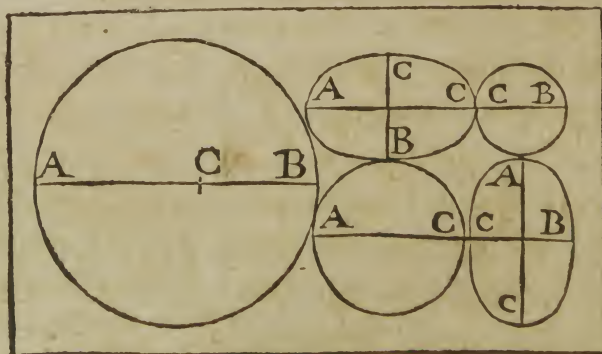
*Expositio & Demonstratio.*

Fig. 27 Propositio hæc consona est Propositioni quartæ libri secundi Eucl. quæ demonstratione stabiliri debet, ei



ei perſimili : quæ ad præcedentes duas adhibita eſt, nec pluribus eget exponi : ſicut nec cæteræ omnes, quæ ex variâ rectæ lineæ ſeſtione , varia orta rectan- gula & Quadrata conſiderant. Semper enim eadem futura eſt utrobique ratio : ſi loco Quadratorum, cir- culi aſſumantur; quorum diametri ſint ipſa Quadra- torum latera : loco verò rectangulorum aſſumantur vel Ellipſes, quarum axes ſint ipſa latera rectangulo- rum; vel circuli, quorum diametri ſint mediæ propor- tionales inter rectangulorum latera.

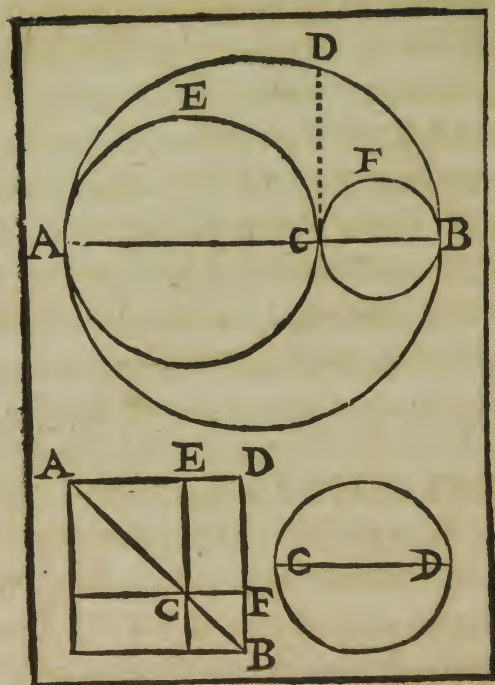
PROP. XLIII. THEOR.

Complementum duorum quorumlibet ſe- micirculorum, medium eſt proportionale in- ter ipſos totos circulos.

EXPOSITIO.

Sint duo quilibet circuli AEC, CFB : quorum Fig. 28  
diametri in vnâ rectam lineam AB componantur, ſeſeque propterea tangant in C. deſcribatur autem cir- ca diametrum AB circulus ADB : qui priores tanget in A & B ; duoque curuilinea triangula conſtituet; quorum vtrumque à tribus ſemiperipheriis trium cir- culorum comprehenditur. Voco igitur duo illa cur- uilinea triangula, complementa duorum circulorum minorum; eo plane modo; quo vocat complementa Euclides duo rectangula; quæ cum duobus Quadra- tis, quæ à duobus ſegmentis lineæ rectæ ſunt, Qua- dratum complent à tota linea deſcriptum. Complent  
M enim





enim duo huiusmodi curvilinea triangula duobus  
 circulis AEC, CFB super segmentis AC, CB, de-  
 scriptis addita, totum circulum super tota AB descri-  
 ptum. Alterum horum triangulorum, quale est trian-  
 gulum semicircularum peripheriis ADB, AEC, CFB  
 contentum; dici debet complementum duorum se-  
 micircularum minorum: illudque aio esse medium  
 proportionale inter eosdem duos circulos minores:  
 & probo.

*Demonstratio.*

Fig. 28

Per punctum C ducatur CD perpendicularis ad  
 AB;



FIGURÆ CYCLICÆ.

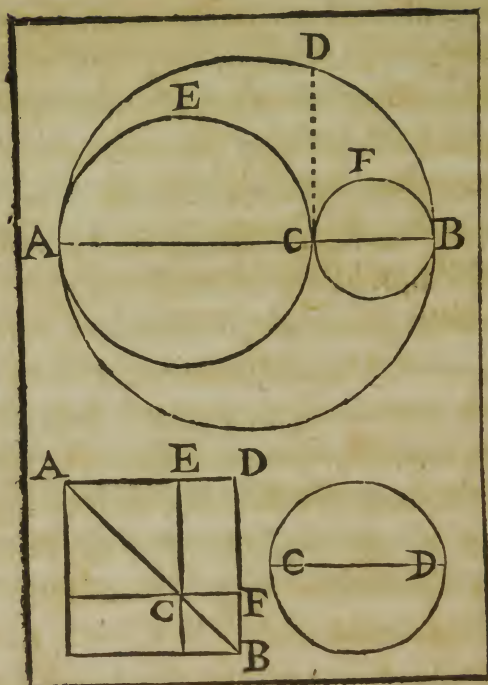
91

AB. Hac, cum sit media proportionalis inter AC, CB; latus est Quadrati æqualis rectangulo sub AC, CB. Quod si circa eandem circulus describatur: erit huiusmodi circulus, medius proportionalis inter circulos duos AEC, CFB: idemque æqualis erit Ellipsi, cuius axes sunt AC, CB. Quibus positis. Cum per Prop. 42. Circulus ADB æqualis sit duobus circulis AEC, CFB, & Ellipsi bis cuius axes sunt AC, CB: Sit autem idem circulus ADB æqualis duobus circulis AEC, CFB & duobus triangulis curvilineis, quos trium semicircularum arcus continent: erunt duo circuli AEC, CFB cum duobus illis triangulis; & duo circuli AEC, CFB cum Ellipsi bis, cuius axes sunt AC, CB, æquales. Demptis ergo circulis duobus AEC, CFB utrimque, duo triangula curvilinea, & Ellipses duæ axium AC, CB remanebunt æqualia inter se. Ergo alterum illorum triangulorum nempe AECFBD A æquale est Ellipsi, cuius axes sunt AC, CB sed huiusmodi Ellipsis, æqualis est circulo cuius diameter est recta CD, ut paulo ante exposui, & præterea est idem circulus medius proportionalis inter circulos AEC, CFB. Ergo triangulum illud curvilineum æquale est, vel Ellipsi axium AC, CB; vel circulo diametri CD; & est præterea medium proportionale inter eosdem circulos AEC, CFB. Quare. Complementum duorum quorumlibet, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hic observare licet Quadratorum & circularum conso-  
M 2 nantiam Fig. 28





nantiam miram. Quæ ut planius exponatur. Fiat Quadratum, cuius diametur sit  $AB$ . Qua secta in  $C$ , & per  $C$  ductis duabus lineis, Quadrati lateribus parallelis fiant duo Quadrata minora  $AEC$ ,  $CFB$  cum duobus complementis, quorum unum est rectangulum  $EF$ . Patet ergo primò rectangulum  $EF$  esse medium proportionale inter duo Quadrata minora  $AC$ ,  $CB$ ; non secus ac triangulum curvilineum  $AECFBD$  a est medium proportionale inter duos circulos  $AEC$ ,  $CFB$ . Secundò Quadratum, cuius diameter est media proportionalis inter duo segmenta  $AC$ ,  $CB$  diametri, totius Quadrati  $ADB$ ; æquale est rectangulo  $EF$ , siue complemento minorum Quadratorum. Ita etiam  
circulus,



circulus, cuius diameter est  $CD$  media proportionalis inter diametros  $AC$ ,  $CB$  minorum circularum; equalis est ostensus triangulo curvilineo siue eorumdem circularum complemento. Tertiò. Occurrit symbolizatio etiam (quod magis mirum) inter earum figurarum ambitus. Nam Quemadmodum duo minora Quadrata  $AC$ ,  $CB$  Isoperimetra sunt Quadrato toti  $AB$ , ut norit quivis Geometras ita duo circuli  $AEC$ ,  $CFB$  Isoperimetri sunt circulo maiori  $ADB$ . Adeo ut due peripherie duorum minorum circularum simul, aequales sint peripherie maioris circuli  $AED$ . Nam ut diameter  $AC$  ad peripheriam sui circuli  $AEC$ : ita est diameter  $CB$  ad peripheriam sui circuli  $CFB$ . Ergo Fig. 28 ita sunt ambe diametri simul, hoc est, tota  $AB$ , ad duas peripherias  $AEC$ ,  $CFB$ , simul, ut diameter  $AC$  ad peripheriam  $AEC$ . Sed ut diameter  $AC$  ad peripheriam  $AEC$ ; ita est diameter  $AB$  ad peripheriam  $ADB$ . Ergo ita est recta  $AB$  ad duas peripherias  $AEC$ ,  $CFB$  simul, ut eadem recta  $AB$  ad peripheriam  $ADB$  ergo due simul peripherie  $AEC$ ,  $CFB$  aequales sunt peripherie  $ADB$ ; hoc est, duo minores circuli Isoperimetri sunt circulo maiori  $ADB$ : aut etiam duo semicirculi minores, maiori semicirculo: est enim utrique parti communis linea recta  $AB$ . Quod idem in Quadrato contingit sunt nimirum duo triangula  $AEC$ ,  $CFD$  Isoperimetra maiori triangulo  $ADB$ : cuius eadem est basis  $AB$ , cum basi minorum triangulorum. Hæc autem æqualitas ambitus tam in circulis quam in Quadratis non tantum reperitur: quando diametri  $AB$  in duo segmenta  $AC$ ,  $CB$  diuiduntur, ut in allatis schematibus factum est: verum etiam quando in plura, si super singula



tam circuli, quàm Quadrata vel semicirculi & triangula describantur. Quotquot enim circuli describentur super diametro  $AB$  in quotlibet partes diuisa; eorum omnium peripherie simul, æquales erunt peripheriæ vnus illius circuli  $ADB$ ; cuius diameter  $AB$  æqualis est omnibus diametris minorum circularum. Quod demonstratione ostendetur eadem plane; qua vsus sum, ut probarem duos circulos  $AEC$ ,  $CFB$  simul circulo  $ADB$  esse Isoperimetros. Nec etiam diuersa est ratio in  $ADB$  Quadrato, siue duo Quadrata siue plura, quotquot libuerit, circa diametrum  $AB$  omnibus communem designentur, modò ipsa tota assumatur: horum enim Quadratorum omnium simul perimenter, solius Quadrati  $ADB$  perimetro est æqualis: non secus ac diametri omnium minorum Quadratorum simul sumpta, æquales sunt diametro  $AB$  maioris Quadrati  $ADB$ . Verùm hæc circularum Isoperimetria vniuersalius proponetur Prop. 45. sequente: ad quam viam aperiet proximum Theorema.

## PROP. XLIV. THEOR.

Fig. 29

Si à duorum circularum sese interiùs tangentium contactu  $A$  recta quælibet  $AD$  emitatur: & ad punctum  $D$ , in quo linea  $AD$  circulo exteriori occurrit, ducatur semidiameter  $ED$ : in qua sumpta  $DG$  æquali, rectæ  $CB$ ; siue excessui diametri maioris circuli supra diametrum minoris, circa  $DG$  diametrum circulus describatur centro  $F$ . Dico circulum hunc transiturum per punctum  $I$ , in quo recta  $AD$  circulum minorem  $ANC$  intersecat.

Demon







## P R O P. XLV. T H E O R.

*Fig. 29* Positis quæ in Antecedente Propositione: tria segmenta trium circularum à recta  $A D$ , abscissa; similia sunt ad utramque eiusdem lineæ  $A D$  partem duoque minora  $A N I$ ,  $I H D$  simul, Isoperimetra sunt maiori  $A L D$ : sicut & duo  $A C I$ ,  $D G I$  sunt segmento  $A B D$  Isoperimetra.

*Demonstratio.*

Quod abscissa segmenta tria à linea  $A D$  similia sint: clarum est. Cum enim duo triangula  $A C I$ ,  $A B D$  (ductas concipe rectas  $C I$ ,  $B D$ ) sint æquiangula: erunt duo segmenta  $A C I$ ,  $A B D$ ; in quibus sunt anguli æquales; similia: similia proinde erunt & reliqua  $A N I$ ,  $A L D$ . Segmento autem  $A L D$  simile est segmentum  $I H D$ : siquidem angulus  $A E D$  ad centrum æqualis est ostensus angulo  $I F D$ , item ad cētrum. Ergo tria illa segmenta semicirculo minora, similia sunt: ac proinde etiam reliqua semicirculo maiora, erunt similia inter se ut habet prior conclusionis pars.

*Fig. 29* Secunda pars Propositionis quod segmenta duo  $A N I$ ,  $I H D$ , segmento  $A L D$  sint Isoperimetra; sicut & duo  $A C I$ ,  $I G D$ , segmento  $A B D$ : non aliter probabitur; quàm probatum est Propositione 43. eiusve scholio duos circulos  $A E C$ ,  $C F B$  illius schematis Isoperimetros esse circulo  $A D B$ . Nam per Propos. 13. lib. 5. Collectionum Pappi, ut recta  $A I$  ad arcum







## PROP. XLVI. THEOR.

*Fig. 29.* Iisdem positis. Si super media proportionali inter  $AI$  &  $ID$ , segmentum describatur simile segmento  $ALB$ , aut  $ANI$ , siue  $IHD$  (sunt enim hæc omnia segmenta paulò ante ostensa inter se similia) Dico segmentum illud æquale fore dimidio curvilineo triangulo  $ALDHINA$ . Similiter si super eadem describatur segmentum semicirculo maius simile segmento  $ABD$ . Dico etiam illud fore æquale dimidio triangulo curvilineo  $ABDOCA$  si prius ab ipso toto triangulo demptum fuerit spatium  $IO$  à duobus arcibus minorum circularum interceptum.

*Præparatio.*

Reperiatur inter  $AC$ ,  $CB$  media proportionalis: cui æqualis ponatur  $AT$ : circa quam circulus describatur secans in  $R$  rectam  $AD$ . Erit  $AR$  media proportionalis inter  $AI$  &  $ID$ . Nam est ut  $AC$  ad  $AT$ , ita  $AI$  ad  $AR$ ; & ut  $AT$  ad  $CB$ ; ita  $AR$  ad  $ID$ . Secatur enim  $AD$  in  $R$  &  $I$  similiter ut  $AB$  secatur in  $T$  &  $C$ . Ergo  $AR$  media est inter  $AI$  &  $ID$ ; sicuti media est  $AT$ , inter  $AC$ ,  $CB$ . Præterea segmentum  $ASR$  simile est segmento  $ALD$ , & segmentum  $ATR$  simile segmento  $ABD$ . Ostendi ergo debet iuxta sensum Propositionis segmentum  $ASR$  æquale esse dimidio trianguli curvilinei  $AID$  arcibus  $ALD$ ,  $ANI$ ,  $IHD$  contenti: segmentum autem  $ATR$  æquale dimidio trianguli







mentum  $ASR$  æquale est semissi trianguli curvilinei  $ADI$ . Neque enim plures esse possunt mediæ quantitates proportionales inter duas, si continua sit proportio. Eodemmodo probabitur segmentum semicirculo maius  $ATR$  esse æquale dimidio trianguli curvilinei  $AOD$  mulctati spatio curvilineo  $IO$ . Nam segmentum  $ABD$  totius lineæ  $AD$ , superat duo segmenta  $ACI, IOD$  linearum  $AI, ID$ , triangulo curvilineo  $AOD$ , si ab eo dematur spatium  $IO$ , in quo duo illa segmenta communicant. Ergo semissis huius trianguli  $AOD$  mulctati spatio  $IO$ , est medius proportionalis inter segmenta  $ACI, DOI$  abscissa à lineis  $AI, ID$ . Sed segmentum  $ATR$  est etiam medium proportionale inter eadem segmenta  $ACI, DOI$ . Ergo segmentum  $ATR$  æquale est semissi trianguli curvilinei  $AOD$  mulctati spatio  $IO$ . Quare iisdem positis si super media, &c. Quod erat probandum.

## S C H O L I U M.

*Fig. 29* Hinc fit totum circulum  $ASRT$  esse æqualem dimidio spatio, quo circulus totius rectæ  $AB$ , superat circulos  $ANC, DHIO$ , quorum diametri sunt  $AC, CB$ , ipsius scilicet lineæ  $AB$  partes. Cum segmenta semicirculo tam minora inter se, quam maiora inter se eandem rationem seruent, rationem scilicet, quam habent Quadrata partium lineæ  $AD$ , etiam eandem retinebunt circuli integri ex duobus segmentis conflati. Quod idem superius Prop. 43. ostensum etiam fuit: in qua segmenta æqualia in omnibus circulis



lis. Nempe semicirculi, à linea  $ACB$  abscinduntur. Sequitur etiam segmentum circuli, qui sit circuli  $ASRT$  duplus, segmento  $ASR$  simile; fore æquale triangulo curvilineo  $ADI$ . Erit enim segmentum circuli illius dupli, simile segmento  $ASR$ , eiusdem segmenti etiam duplum: Ergo æquale dicto triangulo curvilineo. Unde patet quid circa segmentum semicirculo maius concludendum sit.

## PROP. XLVII. PROBL.

Dato circulo triangulum curvilineum æquale definire.

*Constructio & Demonstratio.*

Resumatur figura Propositionis 43. in qua detur Fig. 28  
 circulus  $CD$ : cui æquale triangulum curvilineum statuendum sit. Id variis modis nonnihil inter se diversis absolui potest. Et quidem.

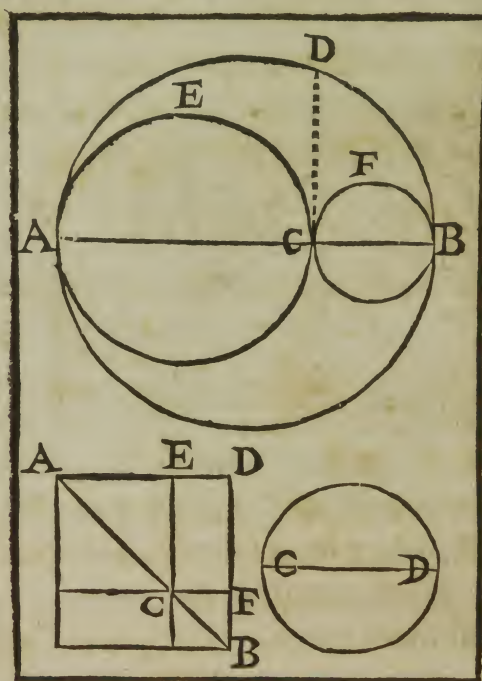
Primò si assumpta quælibet linea  $AB$ , quæ minor non sit quàm dupla diametri  $CD$ , dati circuli; diuidatur in  $C$ ; ita ut  $CD$  media proportionalis sit inter eius partes  $AC$ ,  $CB$ . Deinde tam circa totam  $AB$ , quam circa utramque eius partem  $AC$  &  $CB$  semicirculi describantur: eorum peripheriæ triangulum curvilineum constituent æquale dato circulo  $CD$  ut probatur ex allata demonstratione citatæ Propositionis 43. Dixi verò totam  $CB$  non debere esse minorem quam duplam diametri dati circuli  $CD$ : alioquin enim linea  $AB$  secari non posset ita ut inter eius partes linea  $CD$  foret media proportionalis. Semissis

N 3 cnim



enim lineæ cuiusvis est maxima linea media proportionalis inter partes, in quas ipsa diuidi potest.

*Figura Vigesima octaua.*

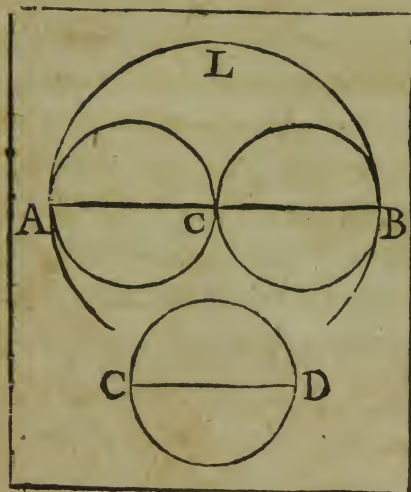


*Fig. 28* Secundò dari potest alterutra linearum  $AC$ ,  $CB$ . Tunc verò duabus  $AC$ ,  $CD$  (quæ diameter est circuli dati) tertia reperiatur proportionalis  $CB$ : quæ cum prima  $AC$  in vnam rectam lineam  $AB$  componatur: circa quam sicut & circa singulas  $AC$ ,  $CB$  describantur semicirculi: Eorum enim peripheriæ triangulum curuilineum efficient dato circulo  $CD$  æquale. Nec alia erit praxis, si linea quævis  $CB$  detur minor, quam  $CD$ : reperietur enim tunc tertia proportionalis maior  $AC$ : & totum vt prius, Problema soluetur.

Tertiò



Figura trigesima.



Tertiò si detur lineæ  $AC$  vel  $CB$  æqualis diame- *Fig. 30*  
tro  $CD$  circuli dati: erunt tres continuè proportio-  
nales, inter se æquales: & proinde diameter  $AB$  du-  
pla erit diametri  $CD$ : quo fit vt circulus circa  $AB$  sit  
quadruplus circuli circa  $CD$ ; semicirculus verò  $ALB$ ,  
eiusdem duplus. Quare demptis duobus semicircu-  
lis minoribus circulo  $CD$  æqualibus; remanebit  
triangulum curuilineum æquale circulo  $CD$ : quod  
triangulum non immeritò Isosceles dici debet ob duo  
eius latera (quæ sunt semicircumferentiæ duorum mi-  
norum circulorum) inter se æqualia. Triangulum igi-  
tur curuilineum, nec vnus generis tantum, sed mul-  
tiplicis, dato circulo æquale definiuimus. Quod erat  
faciendum.

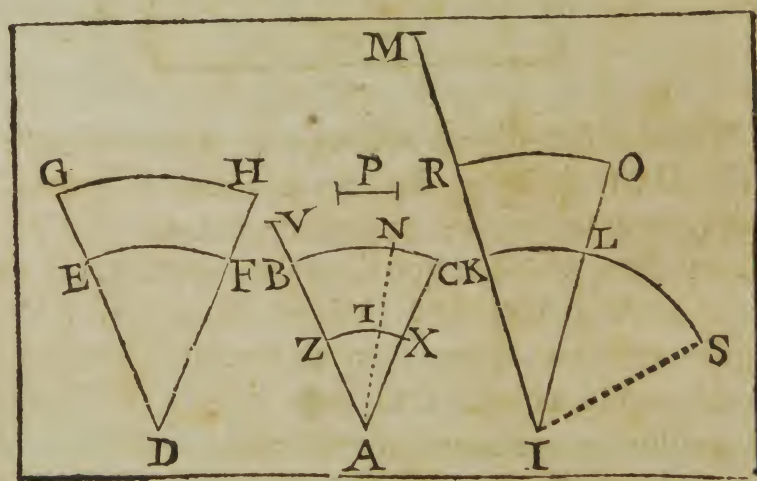
PROP.



## PROP. XLVIII. PROBL.

Datis duobus sectoribus parium circularum siue æqualibus; siue etiam inæqualibus, modo eorum ratio nota sit: alterutri æquale Quadrilaterum mixtum statuere ad alterius arcum eiusque radios. Siue extra sectorem ipsum; siue intra eundem; modò tunc sector mutandus, maior non sit sectore, intra quem fieri debet Quadrilaterum.

Figura Trigesimaprima.



## E X P O S I T I O.

*Fig. 31* Problematis huius varij sunt casus. Primus est quando sectores ambo æquales sunt, vt ABC, DEF. Tunc verò ad arcum EF, eiusque radios DE, DF productos licebit Quadrilaterum mixtum, quale est GEFH, apponere æquale alteri sectori ABC non autem verus



sus centrum D, vt patet; æqualis enim iam est sector DEF sectori ABC.

Secundus casus est: cum duo sectores inæquales sunt, vt ABC, IKL; & ad arcum KL sectoris minoris apponendum est Quadrilaterum æquale sectori maiori ABC. Tunc autem iuxta conditionem in textu additam; Quadrilaterum illud extra sectorem IKL exhibere licebit æquale sectori ABC: quomodo enim intra componeretur: cum sector ipse totus IKL minor supponatur sectore altero ABC.

Tertius casus est: cum duo sectores inæquales quidem sunt: sed Quadrilaterum minori sectori æquale apponendum est ad arcum maioris. Vt, si sectori IKL æquale Quadrilaterum fieri debeat ad arcum BC maioris sectoris. Tunc tam vltra, quàm citra arcum BC, Quadrilaterum statui poterit. His annotatis, casus singulos soluemus.

*Constructio & Demonstratio primi casus.*

In hoc casu, in quo duo sectores ABC, DEF ponuntur æquales, expedita est solutio. Nam si reperitur sector DGH duplus sectoris DEF, eo, quo in Elementis docetur, modo: erit Quadrilaterum GEFH æquale sectori ABC. Fig. 31

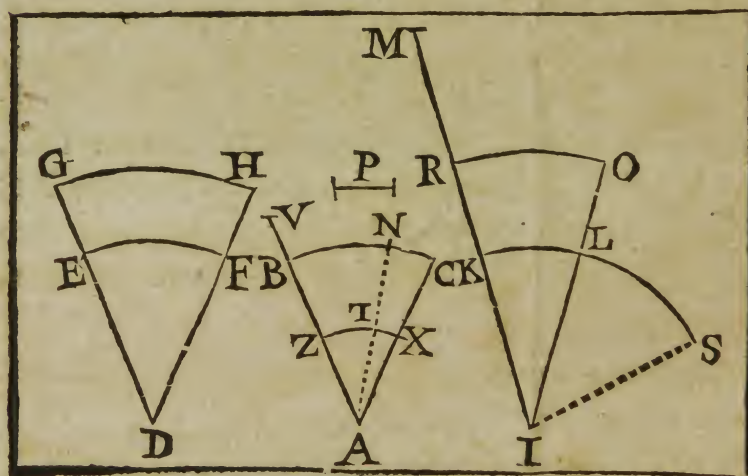
*Constructio secundi casus.*

Ex suppositione nota est ratio angulorum BAC, Fig. 31  
KIL: siue arcuum BC, KL; imò & ipsorum sectorum  
O rum



rum : cum eadem sectorum sit, quæ angulorum, siue arcuum. Sit ergo data ratio eadem, quæ est MK ad KI: Et inter totam MI, & consequentem KI, fiat media proportionalis IR. Quo radio centro I describatur arcus RO. Dico mixtum Quadrilaterum RKLO, æquale esse sectori ABC: atque ita Problemati, quoad hunc casum, satisfactum esse.

*Figura Trigesima prima.*



*Demonstratio.*

*Fig. 31* Producatur arcus KL vsque ad S, ita vt LS sit æqualis arcui BC, & ducatur radius IS. Erit sector ILS æqualis sectori ABC. Hunc ergo ostendo æqualem esse Quadrilatero RKLO. Quia tres lineæ IK, IR, IM sunt ex constructione continuè proportionales



portionales : ita erit sector I K L super primam, ad sectorem I R O similem, super secundam I R : ut est prima linea I K ad tertiam I M. Sed ut I K ad I M; ita est sector I K L ad sectorem I K S. Nam ex hypothesi ut I K ad K M; ita sector I K L ad sectorem A B C, vel I L S. Ergo componendo ut I K ad I M, ita sector I K L ad sectorem I K S. Cum igitur eadem sit ratio sectoris I K L tam ad sectorem I R O; quam ad sectorem I K S : sectores illos æquales esse necesse est. Dematur sector communis I K L remanebit Quadrilaterum R K L O æquale sectori I L S, siue sectori A B C. Præstitum ergo est quod casu hoc secundo quærebat.

*Constructio tertij casus.*

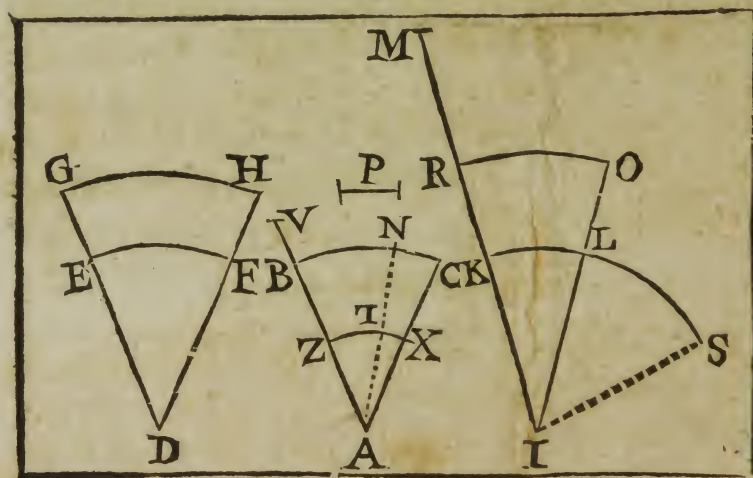
Dati sint sectores duo I K L, A B C : quorum ille *Fig. 31* minor sit isto : atque adeo in isto Quadrilaterum mixtum fieri queat versus centrum A æquale dato sectori I K L. Sit ergo data ratio sectoris minoris I K L ad maiorem A B C eadem, quæ est inter I K, siue A B ad A V. Et ponatur arcus B N æqualis arcui K L; ducaturque recta A N : erit sector A B N æqualis sectori I K L. Est ergo sector A B N ad sectorem A B C; ut recta A B ad A V. Ergo etiam ita est sector A B C ad sectorem A N C; ut recta A V ad B V per divisionem rationis contrariam. Quia igitur nota est ratio sectoris A B C ad sectorem A N C : poterit sector A N C reuocari ad sectorem similem sectori A B C per Prop. 39. Si nimirum fiat ut A V ad B V; ita A N siue

O 2 AB



AB ad quartam P. tum inter AB & P, media proportionalis reperiatur: cui fiat æqualis AZ; eoque radio centro A describatur arcus ZX: erit enim sector AZX æqualis sectori ANC ex 39. citatâ Prop. Quo posito dico Quadrilaterum BZXC æquale esse sectori IKL siue ABN.

Figura Trigesimaprima.



Demonstratio.

Fig. 31 Duo sectores ANC, AZX æquales sunt ex constructione. Dematur sector communis ATX. Remanebit Quadrilaterum mixtum NTXC æquale sectori AZT. Addatur commune Quadrilaterum BZTN: fiet totum Quadrilaterum BZXC æquale. Sectori ABN siue IKL. Sector ergo IKL reuocatus est ad Quadrilaterum intra maiorem sectorem eiusque arcui BC adiacet. Quod iubebatur.

SCHO



SCHOLIUM.

*Affinis est hæc Propositio Propositioni 39. proinde ad illam allata corollaria, etiam in hac locum habent. Poterit itaque mixtum Quadrilaterum fieri, cuius unum latus sit arcus dati sectoris, æquale circulo, cuius radius radio sectoris sit æqualis iuxta huius Propositionis conditiones. Poterit vicissim armilla siue orbis siue extra circumulum siue intra componi æqualis sectori dato.*

PROP. XLIX. PROBL.

Dato sectori ABC ad centrum, sectorem æqualem ad circumferentiam exhibere.

*Figura Trigesimasecunda.*



*Constructio & Demonstratio.*

Chordæ AC arcum sectoris subtendenti parallela per centrum A ducatur DE. Tum ad punctum D, vel  
 O 3 E, du

Fig. 52

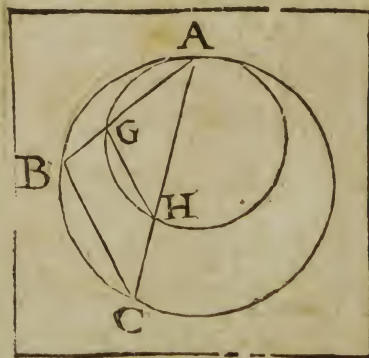


E, ducantur rectæ BD, CD. Dico sectorem DBC æqualem esse sectori ABC ad centrum. Patet. Nam triangula BAC, BDC super eadem basi, & in eisdem parallelis sunt æqualia. Addatur commune segmentum BC. Fiet sector DBC ad circumferentiam, æqualis sectori ABC ad centrum. Quod fieri debuit.

P R O P. L. T H E O R.

Si à duorum circulorum ABC, AGH sese tangentium contactu A, duæ rectæ AB, AC intra ipsos cadant: hæ tam ex ipsis circulis, quam ex interiectâ Lunulâ per contactum, partes similes intercipient.

*Figura Trigesimatertia.*



*Demonstratio.*

Fig. 33. Ductæ duæ rectæ AB, AC, occurrant circulo exteriori in B & C; circulo verò interiori in G & H: &



& tam B & C: quàm G & H rectis lineis iungantur. Erunt rectæ B C, GH inter se parallelæ. Nam cum ex demonstratione prioris partis Propositionis 45. constet lineam A B duo similia segmenta A B, A G abscindere: illis autem segmentis insistant ad circumferentiam anguli A C B, A H G: eos æquales esse necesse est. At angulus A H G externus est; internus autem A C B. Hoc cum ita sit, ita erit A C ad A H; vt B C ad G H. Ergo ita est triangulum A B C ad triangulum A G H; vt segmentum B C ad segmentum G H per 22. lib. 6. Et Permutando. Ita triangulum A B C ad segmentum B C; vt triangulum A G H ad segmentum G H. Et Componendo. Ita sector A B C ad circumferentiam, ad segmentum B C; vt sector A G H, ad segmentum G H. Et Permutando. Ita sector A B C, ad sectorē A G H; vt segmentū B C ad segmentū G H. Sed segmentū B C ita est ad segmentū G H; vt circulus A B C est ad circulum A G H per 12. Prop. huius. Ergo sector A B C ita est ad sectorem A G H vt circulus totus A B C, ad totum circulum A G H & per Diuisionem rationis contrariam, ita est excessus maioris sectoris A B C (qui excessus est Quadrilaterum mixtum G B C H) supra minorem A G H, ad ipsum minorem sectorem; vt excessus maioris circuli (qui excessus est Lunula per contactum) ad ipsum minorem circulum. Et permutando. Ita est mixtum Quadrilaterum G B C H, ad Lunulam, vt sector A G H ad suum circulum; vel etiam vt sector A B C ad circulum



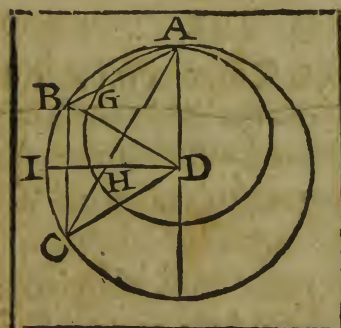




& H. Dico Quadrilaterum mixtum G B C H sextam esse partem totius Lunulæ.

Nam ductis lineis D B, D C à centro D circuli maioris, sector D B C est sexta pars totius circuli A B C. Sed sector A B C ad circumferentiam est in hoc casu propter parallelas A D, B C, æqualis sectori D B C. Ergo & ipse A B C sexta pars est circuli A B C. Sed per *Fig. 34.* Prop. antecedentem duæ lineæ A B, A C tam ex circulis, quàm ex Lunula partes similes abscindunt. Ergo mixtum Quadrilaterum G B C H sexta pars est totius Lunulæ propositæ. Solutum ergo est propositum Problema vt oportebat.

*Figura Trigesimaquarta.*



SCHOLIUM.

*Quomodo autem applicari debeat recta B C sextam partem totius peripheriæ subtendens, ita vt parallela sit diametro A D actæ per circulorum centra, eorûmque contactum A: paucis accipe. Ducito radium D I perpendicularem*

P ad



ad diametrum  $AD$ : & à puncto  $I$ , utrimque reponere usque ad  $B$  &  $C$  semissem arcus, qui sit sexta pars peripheriæ totius circuli; tum ducito rectam  $BC$ . Hæc enim est parallela diametro  $AD$ . Constat ex Elementis.

Porrò non tantum uti licet recta  $BC$  subtendente sextam partem peripheriæ circuli exterioris: sed assumi etiam poterit chorda subtendens sextam partem peripheriæ circuli interioris cuiusmodi foret recta connectens puncta  $G, H$ : quæ, ut prior  $BC$ , applicabitur ita ut sit parallela diametro  $AD$ , ducta ad  $AD$  perpendiculari ex centro circuli minoris. Denique non omittendum. Quod si plures circuli describantur sese tangentes in  $A$ ; Lunulas omnes similiter secari à rectis  $AB, AC$ ; earumque partem quesitam inter easdem intercipi.

### PROP. LII. THEOR.

Fig. 35 Si circa radium  $BA$  circuli  $AEF$ , describatur circulus  $ACB$ : quilibet radius  $BE$  maioris circuli abscindit ex Lunula inter duos circulos intercepta triangulum mixtum  $AEC$  æquale segmento  $AIC$  minoris circuli, quod arcus  $AC$  ab eodem radio  $BE$  abscissus constituit cum recta  $AC$ , eundem arcum subtendente.

### Demonstratio.

Fig. 35. Producat  $AC$  donec circulo maiori occurrat in  $F$ . Recta  $AF$  abscindit ex duobus circulis segmenta  $AEF, AIC$  similia. Habent ergo inter se eandem rationem quam inter se observant duo circuli. Sed circu







culo exteriori occurrat in F, Abfcindit ex circulis duo segmenta AEF, AIC fimilia: Ergo ita fe habet chorda AF ad arcum AEF vt chorda AC ad arcum AIC. Et permutando. Ita eft chorda AF ad chordam AC; vt arcus AEF ad arcum AIC. Sed chorda AF eft dupla chordæ AC per 3.lib.3. Ergo arcus AEF duplus eft arcûs AIC. Ac proinde femiffis arcus AEF, hoc eft, arcus AE æqualis erit arcui AIC. Quare. Iifdem pofitis idem radius BE maioris circuli, &c. Quod erat probandum.

F I N I S.



Fig. 19. pag. 66.



Fig. 25. pag. 86.

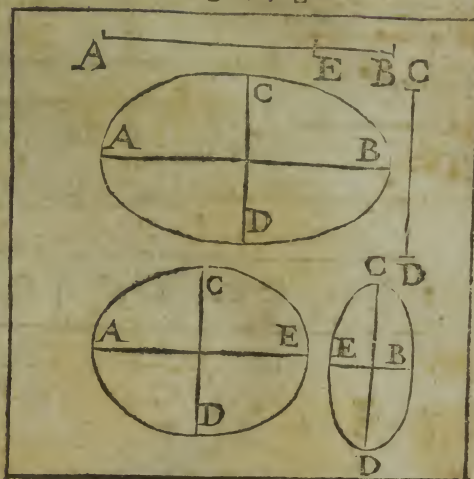


Fig. 29. pag. 100.

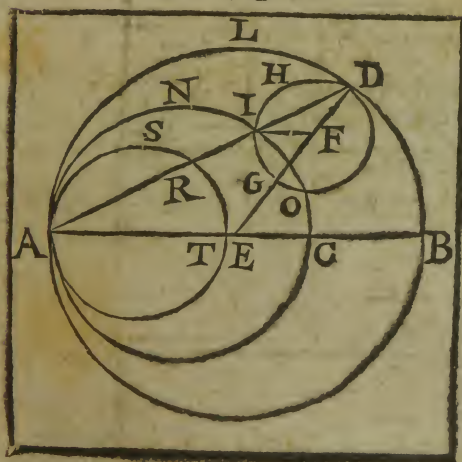
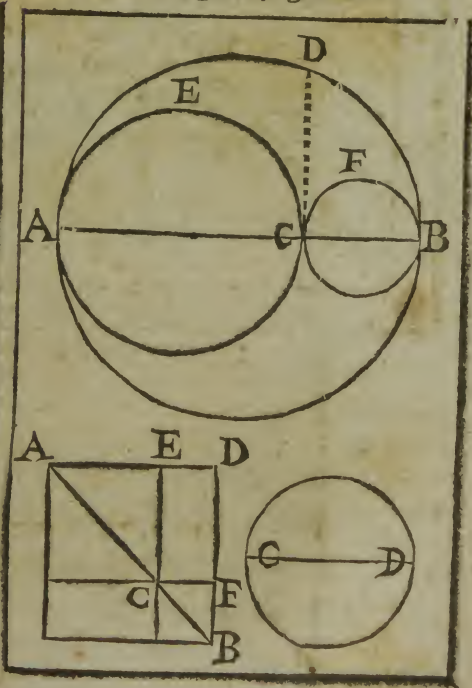


Fig. 28. pag. 101.





# PARS II.

Propag. 10.

A	—	E
B	—	
C	—	
D	—	F

Propag. 54.

A 12.	B 3.	A 12.	C 6.	B 3.
-------	------	-------	------	------

A 12.	C 8.
B 3.	D 6.

Propag. 64.

C 8.	D 6.	E $4\frac{1}{2}$	C 8.	E $4\frac{1}{2}$	A 12.	F $6\frac{3}{4}$
------	------	------------------	------	------------------	-------	------------------

Propag. 65.

A 9.	C 4.	E 36	G 6.	vel	G 3
B 8.	D 2.	F 16.	H 4.		H 2

Fig. 18. pag 158 159 160

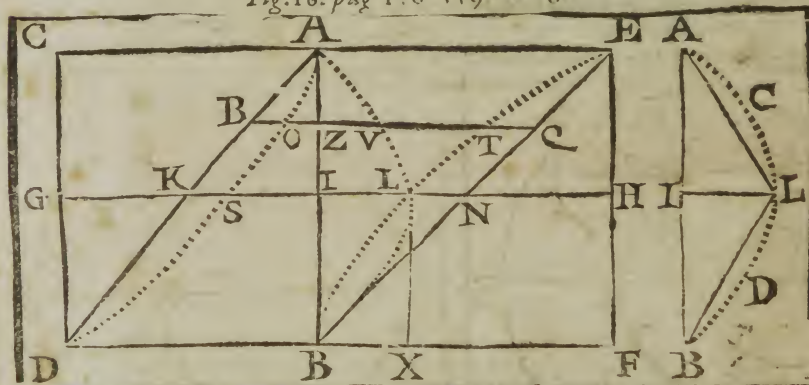


Fig. 21.  
Pro pag.  
158. 159.  
160.

